Bsc algebra2 keresztféléves gyakorlat

Első zárthelyi (2010. március 17.) — eredmények

1. a) Az első index szerint rendezve $a_{15}a_{21}a_{34}a_{42}a_{53}$ (1 pont). Az inverziók száma a második indexek által megadott permutációban 6 (1 pont), ezért az előjel + (1 pont). b) A megoldóképletet alkalmazzuk. A négyzetgyök alatt $2i$ van, amelynek négyzetgyöke (akár trigonometrikus alakkal, akár az algebrai módszerrel kiszámítva) $\pm(1+i)$ (2 pont). A megoldások: $2+3i$ és $1+2i$ (1 pont).

2. A Gauss-eliminációt elvégezve látjuk, hogy a determináns nulla (2 pont), az általános megoldás pedig $(x, y, z) = (1{,}9-0{,}9y, y, 0{,}2-0{,}2y)$ (4 pont). Aki másképp végezte a Gauss-eliminációt, annak más alakban is kijöhetett a végeredmény, például így: $(x, y, z) = (1 + (9/2)z, 1 - 5z, z)$.

3. a) Például $\begin{pmatrix} i & i & i \\ -i & -i & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. b) Mivel $1-\sqrt{3}i = 2(\cos(300° + i\sin 300°)$ (1 pont), ezért a keresett gyökök $\sqrt[6]{2}(\cos 50° + i\sin 50°)$, $\sqrt[6]{2}(\cos 110° + i\sin 110°)$, $\sqrt[6]{2}(\cos 170° + i\sin 170°)$ (2 pont).

4. Ha $z = x + iy$, ahol x, y valós, akkor a feltétel $x - y \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ (1 pont), amiből látjuk, hogy $x \geq y$ (1 pont). Emellett a feltétel mellett a négyzetre emelés már ekvivalens átalakítás, ahonnan $-2xy \geq 0$ adódik (1 pont). Ez utóbbi egyenlőtlenség a második és a negyedik síknegyed unióját adja, a határoló egyeneseket is beleértve (2 pont). Az $x \geq y$ egyenlőtlenséget is figyelembe véve a megoldás a negyedik síknegyed a két határoló félegyenessel és az origóval együtt (1 pont).

5. Az első oszlopból 3-at kiemelve, majd ennek négyszeresét a többi oszlopból kivonva egy olyan determinánst kapunk, melynek mellékátlója alulról fölfelé haladva $1, -1, \ldots, -1$, alatta pedig csupa nulla áll (2 pont). Cseréljük meg az első oszlopot az utolsóval, a másodikat az utolsó előttivel, és így tovább (1 pont). Ekkor $[n/2]$ cserét hajtottunk végre, és a főátló alatt már nulla van, ezért a végeredmény $3 \cdot (-1)^{n-1+[n/2]}$ (3 pont). Plusz egy bónuszpontért: ez 3, ha n néggyel osztva 1 vagy 2 madarékot ad, különben pedig -3.

6. Az elforgatás képletét felhasználva (K1.4.11. Gyakorlat) az első forgatás eredménye $i(z-1)+1$ (1 pont), és így $f(z) = i\big(i(z-1)+1+1\big)-1 = -z+2i$ (1 pont). Innen $f\big(f(z)\big) = -(-z+2i)+2i = z$ (1 pont). Tehát f-et kétszer alkalmazva az identitást kapjuk, és így kilenc darab f ugyanazt teszi, mint egy darab (2 pont). A végeredmény $f(5-3i) = -5+5i$ (1 pont). *Megjegyzés:* Láthatjuk, hogy paraméterekkel számolni sokkal hasznosabb, mint konkrét számokkal, mert ennek alapján szabályszerűségeket vehetünk észre. Aki rögtön az $5-3i$-re kezdi alkalmazni a forgatásokat, könnyen beleveszhet egy hatalmas számolásba.