NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

Mat. BSc. **Algebra1: 3. vizsga (keresztfélév)/1** *2010. június 30.*

I. rész (90 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. A legalább elégséges osztályzat feltétele az első* 15 *és az utolsó* 15 *kérdésből egyaránt elért legalább* $6-6$ *pont* **és** *a dolgozat második részével együtt szerzett legalább* 14 *pont.*

1. Mely z komplex számokra teljesül a $\big(\operatorname{Re}(z)+\operatorname{Im}(z)\big)\big(\operatorname{Re}(z)-\operatorname{Im}(z)\big)=|z|^2$ összefüggés?

A valósakra.

2. Egy z komplex szám egyik 360-adik gyöke i. Adjuk meg z-nek egy olyan 360-adik gyökét, melynek valós része negatív.

$\cos 91^\circ + i\sin 91^\circ$

3. Az i számot w körül elforgatjuk $+90$ fokkal. Melyik komplex számot kapjuk?

$(i-w)i+w=w(1-i)-1$

4. Az ε szám primitív ezredik egységgyök. Mennyi lesz ε^{36} rendje?

$1000/(1000,36)=250$

5. Soroljuk föl azokat a $30^\circ \le \alpha < 60^\circ$ szögeket, melyekre a $\cos\alpha + i\sin\alpha$ szám rendje 90.

44°, 52°

6. Adjunk példát olyan három egyenletből álló lineáris egyenletrendszerre, melyben 3 szabad és 1 kötött változó van.

$x+y+u+v=0$,
$2x+2y+2u+2v=0$,
$3x+3y+3u+3v=0$

7. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: ha egy homogén lineáris egyenletrendszerben az ismeretlenek száma egyenlő az egyenletek számával, akkor egyértelmű a megoldás.

$x+y=0$,
$2x+2y=0$

8. Egy m ismeretlenes lineáris egyenletrendszer n egyenletből áll, és a megoldások száma k. Tudjuk, hogy megoldható a Cramer-szabállyal. Mennyi $m-k-n$?

-1

9. Adjunk példát olyan $M\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixra, melynek egyik eleme sem nulla, de M^TM-nek van nulla eleme.

$M=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

10. Számítsuk ki $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ inverzében a harmadik sor első elemét.

$-1/9$

11. Az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon adjunk példát olyan cserére, melyben 5 inverzió van.

Az 1 és a 4 cseréje.

12. Az 5×5-ös $((a_{ij}))$ determináns első és negyedik sora egyenlő. Az $a_{13}a_{24}a_{31}a_{45}a_{52}$ tagot melyik tag ejti ki biztosan? (Az első index a sort, a második az oszlopot jelöli.)

$a_{43}a_{24}a_{31}a_{15}a_{52} = a_{15}a_{24}a_{31}a_{43}a_{52}$

13. Írjuk föl a 4×4-es $((a_{ij}))$ determináns második oszlopa szerinti kifejtését. Az a_{ij}-hez tartozó (még) **nem** előjelezett aldetermináns értéke M_{ij}.

$-a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} - a_{32}M_{32} + a_{42}M_{42}$

14. Egy 5×4-es mátrix első sora és utolsó oszlopa végig nulla, és az első két oszlop összege a harmadik. Mik a rangjának lehetséges értékei?

0, 1, 2

15. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: ha egy mátrix egy nem nulla oszlopát csupa nullára változtatjuk, akkor a rangja csökken.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

16. Két másodfokú polinom összege hányadfokú lehet?

0, 1, 2, vagy nincs foka

17. Mit jelent az, hogy egy polinom normált?

A főegyütthatója 1.

18. Az $x^3 + px + q \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak gyöke az $1 + i$. Mennyi a q értéke?

4

19. Ha $(x - i)^3 f(x) \in \mathbb{R}[x]$ és f foka 3, akkor hány valós gyöke van f-nek?

0 mert f-nek (legalább) háromszoros gyöke a $-i$.

20. Mi a maradék, ha $x^4 - 2$-t elosztjuk $x - i$-vel?

-1

21. Mely normált, elsőfokú, komplex együtthatós polinomokkal osztható maradékosan $x^3 + 2x + 1$ úgy, hogy $x + 1$ legyen a maradék?

x, $x + i$, $x - i$

22. Mik az egységek $\mathbb{C}[x]$-ben?

A nem nulla konstansok.

23. Hány irreducibilis tényezője van $\mathbb{R}$ fölött az $x^{100} - 1$ polinomnak?

51

24. Hány irreducibilis tényezője lehet $\mathbb{Q}$ fölött egy olyan hatodfokú racionális együtthatós polinomnak, melynek nincs racionális gyöke?

1, 2 vagy 3

25. Adjunk példát, ami azt mutatja, hogy a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltételei közül nem hagyható el az, hogy a konstans tag ne legyen osztható p^2-tel.

$x^2 - 4$

26. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: ha az f egész együtthatós polinomnak gyöke a 2 szám, és irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, akkor irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött is.

$2x - 4$

27. Számítsuk ki a $\Phi_{18}(x)$ körosztási polinomot.

$\Phi_{18}(x) = x^6 - x^3 + 1$

28. Végezzük el $\mathbb{Z}_{17}$-ben a $4 : 5$ osztást.

11

29. Adjunk példát egy test fölött két különböző polinomra, melyekhez ugyanaz a polinomfüggvény tartozik.

$\mathbb{Z}_2$ fölött x és x^2

30. Bontsuk $\mathbb{Z}_3$ fölött irreducibilisek szorzatára az $x^6 - 1$ polinomot.

$(x-1)^3(x+1)^3$

NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

Mat. BSc. **Algebra1: 3. vizsga (keresztfélév)/5** *2010. június 30.*

II. rész (30 perc). *Az alábbi tétel helyes kimondása és a teljes bizonyítás leírása összesen* 4 *pontot ér. A választ a túloldalon is folytathatja, kérjük, hogy a fenti helyre írja rá a* **nevét** *és az* **ELTE-azonosítóját** *nyomtatott nagybetűkkel.*

31. **A racionális gyökteszt.** A tétel **pontos** kimondásáért 1 pont jár.

OSZTÁLYZATOK: Elégtelent az kap, akinek az első vizsgarész első és utolsó 15 *kérdéscsoportjának valamelyikéből nincs meg a* 6 *pontja, továbbá az is, akinek a második résszel együtt számított* S *összpontszáma kisebb, mint* 14*. A többiek osztályzata:*

	Osztályzat
$S \le 17$	2
$18 \le S \le 21$	3
$22 \le S \le 25$	4
$26 \le S \le 34$	5