NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

Mat. BSc. **Algebra1: 2. vizsga (keresztfélév)/1** *2010. június 16.*

I. rész (90 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. A legalább elégséges osztályzat feltétele az első* 15 *és az utolsó* 15 *kérdésből egyaránt elért legalább* $6-6$ *pont* **és** *a dolgozat második részével együtt szerzett legalább* 14 *pont.*

1. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: minden $a \in \mathbb{Z}$ egészhez vannak olyan $b, c \in \mathbb{Z}$ egészek, hogy ha $z = b + ci$, akkor $a = z + \overline{z}$.

   $a = 1$ (mert $z + \overline{z} = 2b$ páros)

2. Egy z komplex szám egyik ötödik gyöke $2(\cos 10° + i \sin 10°)$. Soroljuk föl z azon ötödik gyökeit, melyek képzetes része negatív.

   $\cos 226° + i \sin 226°$, $\cos 298° + i \sin 298°$

3. Az i számot w körül elforgatjuk -90 fokkal. Melyik komplex számot kapjuk?

   $(i - w)(-i) + w = w(1 + i) + 1$

4. Hány olyan 60 rendű komplex szám van, melynek szöge fokban mérve nullára végződik?

   0

5. Adjunk meg egy 1 abszolút értékű, végtelen rendű komplex számot.

   $\cos\left(\sqrt{2} \cdot 360°\right) + i \sin\left(\sqrt{2} \cdot 360°\right)$

6. Egy 100 egyenletből álló homogén lineáris egyenletrendszerben 10 szabad és 20 kötött változó van. Az elimináció végén hány azonosan nulla sor lesz?

   90

7. Adjunk példát olyan lineáris egyenletrendszerre a $\mathbb{Z}_2$ test fölött, melynek pontosan 4 megoldása van.

   $x + y + z = 0$

8. Írjuk föl az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer megoldását a létező M^{-1} felhasználásával.

   $x = M^{-1}b$

9. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times 4}$ úgy, hogy $AA^T - A^T A$ értelmes. Mik n lehetséges értékei?

   4

10. Számítsuk ki $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ inverzében a második sor harmadik elemét.

    $-5/24$

11. A $\{b, 3, \alpha, A\}$ halmaz elemeit permutáljuk. Megcseréljük A-t b-vel, majd b-t α-val, végül 3-at A-val. A kapott permutáció páros vagy páratlan?

    páratlan (3 csere szorzata)

12. Az 5×5-ös $((a_{ij}))$ determináns első és negyedik oszlopa egyenlő. Az $a_{13}a_{24}a_{31}a_{45}a_{52}$ tagot melyik tag ejti ki biztosan? (Az első index a sort, a második az oszlopot jelöli.)

    $a_{13}a_{21}a_{34}a_{45}a_{52}$

13. Adjunk példát két 1 rangú mátrixra, melyek szorzata és összege is nulla.

    $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és az ellentettje

14. Mik $r(A+E) - r(A^T + E)$ lehetséges értékei, ha $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ és E az egységmátrix? (Az r rangot jelöl.)

    0

15. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: minden $0 \neq A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mátrixhoz van olyan $B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mátrix, hogy AB rangja 2.

    A-nak jó bármilyen 1 rangú mátrix.

16. Egy tizedfokú és egy n-edfokú polinom összegének nincs foka. Mik n lehetséges értékei?

$n = 10$

17. Adjunk példát olyan f és g polinomokra, melyekre az 1 az f-nek és a g-nek pontosan kétszeres, az $f+g$-nek pedig pontosan négyszeres gyöke.

$f(x) = (x-1)^2$ és $g(x) = (x-1)^4 - (x-1)^2 = (x-1)^2(x^2-2x)$

18. Egy valós együtthatós, normált, harmadfokú polinomnak gyöke a $3-i$ és a konstans tagja 20. Mennyi az x^2 együtthatója?

-4

19. Egy ötödfokú, valós együtthatós polinomnak nincs többszörös gyöke. Hány valós gyöke lehet?

1, 3 vagy 5.

20. Az $x^5 : g(x)(x^2+1)$ maradékos osztásnál a maradék $x+c$. Határozzuk meg c lehetséges értékeit.

0 (mert $i^5 = i + c$)

21. Az $(x^6 + 2x^3) : x^2$ maradékos osztást Pisti így végezte el: a hányados x^4, a maradék $2x^3$, Klári pedig így: a hányados $x^4 + 2x$, a maradék 0. Miért nem mond ez ellent a maradékos osztás egyértelműségéről szóló tételnek?

Pistié nem maradékos osztás: a maradék foka 3, ami nem kisebb az osztó fokánál (ami 2).

22. Az $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = (x+1)(x-1) = (1-x)(-1-x) = (-1-x)(1-x)$ négy felbontás $\mathbb{R}$ fölött irreducibilisek szorzatára. Adjunk meg egy ötödiket.

$\big(x/2 + (1/2)\big)(2x-2)$

23. Mely pozitív egész n számokra igaz a következő állítás: ha egy n-edfokú egész együtthatós polinomnak nincs racionális gyöke, akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

$n =$1, 2, 3 (aki az 1-et kihagyta, fél pontot kap)

24. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: ha egy egész együtthatós polinom teljesíti a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltételét, akkor irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött.

$3x^3 - 6$ a $p = 2$-re, hiszen a 3 kiemelhető.

25. Adjuk meg $x^3 + 4x^2 + 4x - 1$ irreducibilis tényezőit $\mathbb{Q}$ fölött.

$x^3 + 4x^2 + 4x - 1$ (harmadfokú és nincs racionális gyöke)

26. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: ha egy egész együtthatós polinom irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött, akkor $\mathbb{Q}$ fölött is.

3 (mert $\mathbb{Q}$ fölött egység)

27. Hány irreducibilis tényezője van $\mathbb{R}$ fölött a $\Phi_{30}(x)$ körosztási polinomnak?

4 (mert nincs valós gyöke)

28. Adjunk példát olyan normált polinomra $\mathbb{Z}_8$ fölött, amelynek több gyöke van, mint a foka.

$x^2 - 1$ (mert gyöke a ± 1 és a ± 3)

29. Az $x^2 + x + 2$ polinom $\mathbb{Z}_7$ fölött osztható $2x + 1$-gyel. Mi a hányados?

A hányados $4x + 2$.

30. Bontsuk $\mathbb{Z}_3$ fölött irreducibilisek szorzatára az $x^6 + 1$ polinomot.

$(x^2 + 1)^3$

NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

Mat. BSc. **Algebra1: 2. vizsga (keresztfélév)/5** *2010. június 16.*

II. rész (30 perc). *Az alábbi tétel helyes kimondása és a teljes bizonyítás leírása összesen 4 pontot ér. A választ a túloldalon is folytathatja, kérjük, hogy a fenti helyre írja rá a* **nevét** *és az* **ELTE-azonosítóját** *nyomtatott nagybetűkkel.*

31. **A Cramer-szabály.** A tétel kimondásáért csak akkor jár az 1 pont, ha abban a képlet mellett az alkalmazhatóságának a pontos feltétele is szerepel (milyen az egyenletrendszer, mit teszünk róla fel, mennyi a megoldások száma).

OSZTÁLYZATOK: Elégtelent az kap, akinek az első vizsgarész első és utolsó 15 *kérdéscsoportjának valamelyikéből nincs meg a* 6 *pontja, továbbá az is, akinek a második résszel együtt számított* S *összpontszáma kisebb, mint* 14*. A többiek osztályzata:*

	Osztályzat
$S \leq 17$	2
$18 \leq S \leq 21$	3
$22 \leq S \leq 25$	4
$26 \leq S \leq 34$	5