NÉV: ____________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

Mat. BSc. **Algebra1: 1. vizsga (keresztfélév)/1** *2010. május 28.*

I. rész (90 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. A legalább elégséges osztályzat feltétele az első* 15 *és az utolsó* 15 *kérdésből egyaránt elért legalább* 6 − 6 *pont* **és** *a dolgozat második részével együtt szerzett legalább* 14 *pont.*

1. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: minden $z \in \mathbb{R}$-hez van olyan $w \in \mathbb{C}$, hogy $z = w\overline{w}$.

   $z = -1$ (mert $w\overline{w} = |w|^2 \geq 0$)

2. Soroljuk föl -1 összes köbgyökét a komplex számok között.

   -1, $\cos 60° + i \sin 60°$, $\cos 300° + i \sin 300°$

3. Adjuk meg $-2i(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ trigonometrikus alakját.

   $2\big(\cos(\alpha + 270°) + i\sin(\alpha + 270°)\big)$

4. Adjunk meg egy komplex számot, melynek rendje 30, és a valós része negatív.

   $\cos 156° + i \sin 156°$

5. Hány 30 rendű komplex szám van?

   $\varphi(30) = 8$

6. Adjunk példát olyan három egyenletből álló lineáris egyenletrendszerre, melyben 2 szabad és 2 kötött változó van.

   $x + y = 0$, $u + v = 0$,
   $x + y + u + v = 0$

7. Egy homogén lineáris egyenletrendszer (négyzetes) mátrixának determinánsa 3. Mit mondhatunk a megoldások értékéről?

   Mindegyik nulla (mert egyértelmű a megoldás).

8. Legyen $A \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ és $B \in \mathbb{R}^{5\times 7}$. Hányszor hányas C mátrixokra értelmes az A^TCB kifejezés?

   2×5

9. Adjuk meg az A és B mátrixokat úgy, hogy AB nulla legyen, de BA ne legyen nulla.

   $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

10. Számítsuk ki $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ inverzében az első sor második elemét.

    $-1/2$

11. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: invertálható mátrixok összege is invertálható.

Az egyégmátrix és az ellentettje.

12. Hány inverzió lehet maximum egy 5 elemű halmaz egy páratlan permutációjában? Adjunk is példát ilyen permutációra.

9 darab, az 54312 sorrend.

13. Az 5×5-ös $((a_{ij}))$ determináns második és harmadik oszlopa egyenlő. Az $a_{13}a_{24}a_{31}a_{45}a_{52}$ tagot melyik tag ejti ki biztosan?

$a_{12}a_{24}a_{31}a_{45}a_{53}$

14. Egy 5×4-es mátrix utolsó sora és utolsó oszlopa végig nulla, de az első két oszlop közül egyik sem skalárszorosa a másiknak. Mik a rangjának lehetséges értékei?

2, 3

15. Egy mátrix első két sorát megcseréljük. Hogyan változik meg az inverze?

Az inverznek megcserélődik az első két oszlopa.

16. Egy tizedfokú és egy n-edfokú polinom összege ötödfokú. Mik n lehetséges értékei?

$n = 10$

17. Ha az 1 (pontosan) ötszörös gyöke f-nek és hatszoros gyöke g-nek, akkor hányszoros gyöke $f + g + fg$-nek?

Ötszörös

18. Írjuk föl a $2x^4 - 2$ polinom gyöktényezős alakját $\mathbb{C}$ fölött.

$2(x+1)(x-1)(x+i)(x-i)$

19. Egy valós együtthatós, normált, harmadfokú polinomnak gyöke az $1+i$ és a konstans tagja 2. Mi a másik két gyöke?

$1 - i$ és -1.

20. Mondjuk ki a gyökök és együtthatók összefüggéséről szóló tételt általános polinom esetén. A σ_k jelölést nem kell elmagyarázni (de nem kötelező használni sem).

> Ha $f(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$, ahol $a_n \neq 0$, akkor $\sigma_k = (-1)^k a_{n-k}/a_n$, ahol $1 \leq k \leq n$.

21. Az $f(x) : (x^2 + 1)$ maradékos osztásnál a maradék $x + 1$. Határozzuk meg $f(i)$ értékét.

> $i + 1$

22. Fogalmazzuk meg pontosan mit jelent az $f : g$ maradékos osztás egyértelműsége ($g \neq 0$).

> Ha $f = gq_1 + r_1$ és $f = gq_2 + r_2$ két maradékos osztás (azaz vagy $r_j = 0$, vagy r_j foka kisebb g fokánál), akkor $q_1 = q_2$ és $r_1 = r_2$.

23. Adjuk meg $x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ irreducibilis tényezőit $\mathbb{Q}$ fölött.

> $x^2 + 5x + 1$ és $x - 1$.

24. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: ha egy egész együtthatós ötödfokú polinomnak nincs racionális gyöke, akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

> $(x^3 + 2)(x^2 + 2x + 2)$

25. Hány irreducibilis tényezője van $x^7 - 1$-nek valós fölött?

> 4

26. Ha a $4x^9 + 180$ polinomot $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilisek szorzatára bontjuk, akkor hány tényező keletkezik, és melyik prímre kell alkalmazni a Schönemann-Eisenstein kritériumot?

> 1 tényező, a prím az 5.

27. Ha a $4x^9 + 180$ polinomot $\mathbb{Z}$ fölött irreducibilisek szorzatára bontjuk, akkor hány tényező keletkezik?

3 tényező.

28. Számítsuk ki a Φ_{15} körosztási polinomban x^7 együtthatóját.

-1 (két lépést végrehajtva a $\Phi_{15}(x) = (x^{10} + x^5 + 1)/(x^2 + x + 1)$ osztásban).

29. Adjunk meg egy olyan másodfokú $f \in \mathbb{Z}_6[x]$ polinomot, melyre $f(x)(3x + 1)$ foka 2.

$2x^2$

30. Bontsuk $\mathbb{Z}_2$ fölött irreducibilisek szorzatára az $x^8 + 1$ polinomot.

$(x + 1)^8$

NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

Mat. BSc. **Algebra1: 1. vizsga (keresztfélév)/5** *2010. május 28.*

II. rész (30 perc). *Az alábbi tétel helyes kimondása és a teljes bizonyítás leírása összesen* 4 *pontot ér. A választ a túloldalon is folytathatja, kérjük, hogy a fenti helyre írja rá a* **nevét** *és az* **ELTE-azonosítóját** *nyomtatott nagybetűkkel.*

31. **A hatvány rendjének képlete.** A képlet helyes kimondásáért 1 pont jár. Aki a tankönyvben szereplő bizonyítást ismerteti, annak be kell bizonyítania a felhasznált számelméleti segédállítást is („bolhás" feladat), de a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös nevezetes tulajdonságait nem.

OSZTÁLYZATOK: Elégtelent az kap, akinek az első vizsgarész első és utolsó 15 *kérdéscsoportjának valamelyikéből nincs meg a* 6 *pontja, továbbá az is, akinek a második résszel együtt számított* S *összpontszáma kisebb, mint* 14. *A többiek osztályzata:*

	Osztályzat
$S \le 17$	2
$18 \le S \le 21$	3
$22 \le S \le 25$	4
$26 \le S \le 34$	5