

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

Mat. BSc.

Algebra1: 3. vizsga (keresztfélév)/1

2010. június 30.

I. rész (90 perc). Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. A legalább elégséges osztályzat feltétele az első 15 és az utolsó 15 kérdésből egyaránt elért legalább 6 – 6 pont és a dolgozat második részével együtt szerzett legalább 14 pont.

1. Mely z komplex számokra teljesül a $(\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z))(\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z)) = |z|^2$ összefüggés?

2. Egy z komplex szám egyik 360-adik gyöke i . Adjuk meg z -nek egy olyan 360-adik gyökét, melynek valós része negatív.

3. Az i számot w körül elforgatjuk $+90$ fokkal. Melyik komplex számot kapjuk?

4. Az ε szám primitív ezredik egységgyök. Mennyi lesz ε^{36} rendje?

5. Soroljuk föl azokat a $30^\circ \leq \alpha < 60^\circ$ szögeket, melyekre a $\cos \alpha + i \sin \alpha$ szám rendje 90.

6. Adjunk példát olyan három egyenletből álló lineáris egyenletrendszerre, melyben 3 szabad és 1 kötött változó van.

7. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: ha egy homogén lineáris egyenletrendszerben az ismeretlenek száma egyenlő az egyenletek számával, akkor egyértelmű a megoldás.

8. Egy m ismeretlenes lineáris egyenletrendszer n egyenletből áll, és a megoldások száma k . Tudjuk, hogy megoldható a Cramer-szabállyal. Mennyi $m - k - n$?

9. Adjunk példát olyan $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrixra, melynek egyik eleme sem nulla, de $M^T M$ -nek van nulla eleme.

$M =$

10. Számítsuk ki $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ inverzében a harmadik sor első elemét.
11. Az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon adjunk példát olyan cserére, melyben 5 inverzió van.
12. Az 5×5 -ös $((a_{ij}))$ determináns első és negyedik sora egyenlő. Az $a_{13}a_{24}a_{31}a_{45}a_{52}$ tagot melyik tag ejti ki biztosan? (Az első index a sort, a második az oszlopot jelöli.)
13. Írjuk föl a 4×4 -es $((a_{ij}))$ determináns második oszlopa szerinti kifejtését. Az a_{ij} -hez tartozó (még) **nem** előjelezett aldetermináns értéke M_{ij} .
14. Egy 5×4 -es mátrix első sora és utolsó oszlopa végig nulla, és az első két oszlop összege a harmadik. Mik a rangjának lehetséges értékei?
15. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: ha egy mátrix egy nem nulla oszlopát csupa nullára változtatjuk, akkor a rangja csökken.

16. Két másodfokú polinom összege hányadfokú lehet?

17. Mit jelent az, hogy egy polinom normált?

18. Az $x^3 + px + q \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak gyöke az $1 + i$. Mennyi a q értéke?

19. Ha $(x - i)^3 f(x) \in \mathbb{R}[x]$ és f foka 3, akkor hány valós gyöke van f -nek?

20. Mi a maradék, ha $x^4 - 2$ -t elosztjuk $x - i$ -vel?

21. Mely normált, elsőfokú, komplex együtthatós polinomokkal osztható maradékosan $x^3 + 2x + 1$ úgy, hogy $x + 1$ legyen a maradék?

22. Mik az egységek $\mathbb{C}[x]$ -ben?

23. Hány irreducibilis tényezője van \mathbb{R} fölött az $x^{100} - 1$ polinomnak?

24. Hány irreducibilis tényezője lehet \mathbb{Q} fölött egy olyan hatodfokú racionális együtthatós polinomnak, melynek nincs racionális gyöke?

25. Adjunk példát, ami azt mutatja, hogy a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltételei közül nem hagyható el az, hogy a konstans tag ne legyen osztható p^2 -tel.

26. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: ha az f egész együtthatós polinomnak gyöke a 2 szám, és irreducibilis \mathbb{Q} fölött, akkor irreducibilis \mathbb{Z} fölött is.

27. Számítsuk ki a $\Phi_{18}(x)$ körosztási polinomot.

 $\Phi_{18}(x) =$

28. Végezzük el \mathbb{Z}_{17} -ben a $4 : 5$ osztást.

29. Adjunk példát egy test fölött két különböző polinomra, melyekhez ugyanaz a polinomfüggvény tartozik.

30. Bontsuk \mathbb{Z}_3 fölött irreducibilisek szorzatára az $x^6 - 1$ polinomot.

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

Mat. BSc.

Algebra1: 3. vizsga (keresztfélév)/5

2010. június 30.

II. rész (30 perc). Az alábbi tétel helyes kimondása és a teljes bizonyítás leírása összesen 4 pontot ér. A választ a túloldalon is folytathatja, kérjük, hogy a fenti helyre írja rá a **nevét** és az **ELTE-azonosítóját** nyomtatott nagybetűkkel.

31. **A racionális gyökteszt.** A tétel **pontos** kimondásáért 1 pont jár.

OSZTÁLYZATOK: Elégtelent az kap, akinek az első vizsgarész első és utolsó 15 kérdéscsoportjának valamelyikéből nincs meg a 6 pontja, továbbá az is, akinek a második résszel együtt számított S összpontszáma kisebb, mint 14. A többiek osztályzata:

	<i>Osztályzat</i>
$S \leq 17$	2
$18 \leq S \leq 21$	3
$22 \leq S \leq 25$	4
$26 \leq S \leq 34$	5