NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

Mat. BSc. **Algebra1: 2. vizsga (keresztfélév)/1** *2010. június 16.*

I. rész (90 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. A legalább elégséges osztályzat feltétele az első* 15 *és az utolsó* 15 *kérdésből egyaránt elért legalább* $6-6$ *pont* **és** *a dolgozat második részével együtt szerzett legalább* 14 *pont.*

1. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: minden $a \in \mathbb{Z}$ egészhez vannak olyan $b, c \in \mathbb{Z}$ egészek, hogy ha $z = b + ci$, akkor $a = z + \overline{z}$.

2. Egy z komplex szám egyik ötödik gyöke $2(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)$. Soroljuk föl z azon ötödik gyökeit, melyek képzetes része negatív.

3. Az i számot w körül elforgatjuk -90 fokkal. Melyik komplex számot kapjuk?

4. Hány olyan 60 rendű komplex szám van, melynek szöge fokban mérve nullára végződik?

5. Adjunk meg egy 1 abszolút értékű, végtelen rendű komplex számot.

6. Egy 100 egyenletből álló homogén lineáris egyenletrendszerben 10 szabad és 20 kötött változó van. Az elimináció végén hány azonosan nulla sor lesz?

7. Adjunk példát olyan lineáris egyenletrendszerre a $\mathbb{Z}_2$ test fölött, melynek pontosan 4 megoldása van.

8. Írjuk föl az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer megoldását a létező M^{-1} felhasználásával.

   $x =$

9. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times 4}$ úgy, hogy $AA^T - A^TA$ értelmes. Mik n lehetséges értékei?

10. Számítsuk ki $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ inverzében a második sor harmadik elemét.

11. A $\{b, 3, \alpha, A\}$ halmaz elemeit permutáljuk. Megcseréljük A-t b-vel, majd b-t α-val, végül 3-at A-val. A kapott permutáció páros vagy páratlan?

12. Az 5×5-ös $((a_{ij}))$ determináns első és negyedik oszlopa egyenlő. Az $a_{13}a_{24}a_{31}a_{45}a_{52}$ tagot melyik tag ejti ki biztosan? (Az első index a sort, a második az oszlopot jelöli.)

13. Adjunk példát két 1 rangú mátrixra, melyek szorzata és összege is nulla.

14. Mik $r(A+E) - r(A^T + E)$ lehetséges értékei, ha $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ és E az egységmátrix? (Az r rangot jelöl.)

15. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: minden $0 \neq A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mátrixhoz van olyan $B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mátrix, hogy AB rangja 2.

16. Egy tizedfokú és egy n-edfokú polinom összegének nincs foka. Mik n lehetséges értékei?

17. Adjunk példát olyan f és g polinomokra, melyekre az 1 az f-nek és a g-nek pontosan kétszeres, az $f+g$-nek pedig pontosan négyszeres gyöke.

18. Egy valós együtthatós, normált, harmadfokú polinomnak gyöke a $3-i$ és a konstans tagja 20. Mennyi az x^2 együtthatója?

19. Egy ötödfokú, valós együtthatós polinomnak nincs többszörös gyöke. Hány valós gyöke lehet?

20. Az $x^5 : g(x)(x^2+1)$ maradékos osztásnál a maradék $x+c$. Határozzuk meg c lehetséges értékeit.

21. Az $(x^6+2x^3) : x^2$ maradékos osztást Pisti így végezte el: a hányados x^4, a maradék $2x^3$, Klári pedig így: a hányados x^4+2x, a maradék 0. Miért nem mond ez ellent a maradékos osztás egyértelműségéről szóló tételnek?

22. Az $x^2-1=(x-1)(x+1)=(x+1)(x-1)=(1-x)(-1-x)=(-1-x)(1-x)$ négy felbontás $\mathbb{R}$ fölött irreducibilisek szorzatára. Adjunk meg egy ötödiket.

23. Mely pozitív egész n számokra igaz a következő állítás: ha egy n-edfokú egész együtthatós polinomnak nincs racionális gyöke, akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

$n=$

24. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: ha egy egész együtthatós polinom teljesíti a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltételét, akkor irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött.

25. Adjuk meg $x^3 + 4x^2 + 4x - 1$ irreducibilis tényezőit $\mathbb{Q}$ fölött.

26. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: ha egy egész együtthatós polinom irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött, akkor $\mathbb{Q}$ fölött is.

27. Hány irreducibilis tényezője van $\mathbb{R}$ fölött a $\Phi_{30}(x)$ körosztási polinomnak?

28. Adjunk példát olyan normált polinomra $\mathbb{Z}_8$ fölött, amelynek több gyöke van, mint a foka.

29. Az $x^2 + x + 2$ polinom $\mathbb{Z}_7$ fölött osztható $2x + 1$-gyel. Mi a hányados?

30. Bontsuk $\mathbb{Z}_3$ fölött irreducibilisek szorzatára az $x^6 + 1$ polinomot.

NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

Mat. BSc. **Algebra1: 2. vizsga (keresztfélév)/5** *2010. június 16.*

II. rész (30 perc). *Az alábbi tétel helyes kimondása és a teljes bizonyítás leírása összesen* 4 *pontot ér. A választ a túloldalon is folytathatja, kérjük, hogy a fenti helyre írja rá a* **nevét** *és az* **ELTE-azonosítóját** *nyomtatott nagybetűkkel.*

31. **A Cramer-szabály.** A tétel kimondásáért csak akkor jár az 1 pont, ha abban a képlet mellett az alkalmazhatóságának a pontos feltétele is szerepel (milyen az egyenletrendszer, mit teszünk róla fel, mennyi a megoldások száma).

OSZTÁLYZATOK: Elégtelent az kap, akinek az első vizsgarész első és utolsó 15 *kérdéscsoportjának valamelyikéből nincs meg a* 6 *pontja, továbbá az is, akinek a második résszel együtt számított* S *összpontszáma kisebb, mint* 14*. A többiek osztályzata:*

	Osztályzat
$S \leq 17$	2
$18 \leq S \leq 21$	3
$22 \leq S \leq 25$	4
$26 \leq S \leq 34$	5