

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

Mat. BSc.

Algebra1: 1. vizsga (keresztfélév)/1

2010. május 28.

I. rész (90 perc). Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. A legalább elégséges osztályzat feltétele az első 15 és az utolsó 15 kérdésből egyaránt elért legalább 6 – 6 pont és a dolgozat második részével együtt szerzett legalább 14 pont.

1. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: minden $z \in \mathbb{R}$ -hez van olyan $w \in \mathbb{C}$, hogy $z = w\bar{w}$.

2. Soroljuk föl -1 összes köbgyökét a komplex számok között.

3. Adjuk meg $-2i(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ trigonometrikus alakját.

4. Adjunk meg egy komplex számot, melynek rendje 30, és a valós része negatív.

5. Hány 30 rendű komplex szám van?

6. Adjunk példát olyan három egyenletből álló lineáris egyenletrendszerre, melyben 2 szabad és 2 kötött változó van.

7. Egy homogén lineáris egyenletrendszer (négyzetes) mátrixának determinánsa 3. Mit mondhatunk a megoldások értékéről?

8. Legyen $A \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ és $B \in \mathbb{R}^{5 \times 7}$. Hányszor hányas C mátrixokra értelmes az $A^T C B$ kifejezés?

9. Adjuk meg az A és B mátrixokat úgy, hogy AB nulla legyen, de BA ne legyen nulla.

10. Számítsuk ki $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ inverzében az első sor második elemét.

11. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: invertálható mátrixok összege is invertálható.

12. Hány inverzió lehet maximum egy 5 elemű halmaz egy páratlan permutációjában? Adjunk is példát ilyen permutációra.

13. Az 5×5 -ös $((a_{ij}))$ determináns második és harmadik oszlopa egyenlő. Az $a_{13}a_{24}a_{31}a_{45}a_{52}$ tagot melyik tag ejti ki biztosan?

14. Egy 5×4 -es mátrix utolsó sora és utolsó oszlopa végig nulla, de az első két oszlop közül egyik sem skalárszorosa a másiknak. Mik a rangjának lehetséges értékei?

15. Egy mátrix első két sorát megcseréljük. Hogyan változik meg az inverze?

16. Egy tizedfokú és egy n -edfokú polinom összege ötödfokú. Mik n lehetséges értékei?

17. Ha az 1 (pontosan) ötszörös gyöke f -nek és hatszoros gyöke g -nek, akkor hányszoros gyöke $f + g + fg$ -nek?

18. Írjuk föl a $2x^4 - 2$ polinom gyöktényező alakját \mathbb{C} fölött.

19. Egy valós együtthatós, normált, harmadfokú polinomnak gyöke az $1 + i$ és a konstans tagja 2. Mi a másik két gyöke?

20. Mondjuk ki a gyökök és együtthatók összefüggéséről szóló tételt általános polinom esetén. A σ_k jelölést nem kell elmagyarázni (de nem kötelező használni sem).

21. Az $f(x) : (x^2 + 1)$ maradékos osztásnál a maradék $x + 1$. Határozzuk meg $f(i)$ értékét.

22. Fogalmazzuk meg pontosan mit jelent az $f : g$ maradékos osztás egyértelműsége ($g \neq 0$).

23. Adjuk meg $x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ irreducibilis tényezőit \mathbb{Q} fölött.

24. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: ha egy egész együtthatós ötödfokú polinomnak nincs racionális gyöke, akkor irreducibilis \mathbb{Q} fölött.

25. Hány irreducibilis tényezője van $x^7 - 1$ -nek valós fölött?

26. Ha a $4x^9 + 180$ polinomot \mathbb{Q} fölött irreducibilisek szorzatára bontjuk, akkor hány tényező keletkezik, és melyik prímre kell alkalmazni a Schönemann-Eisenstein kritériumot?

27. Ha a $4x^9 + 180$ polinomot \mathbb{Z} fölött irreducibilisek szorzatára bontjuk, akkor hány tényező keletkezik?

28. Számítsuk ki a Φ_{15} körosztási polinomban x^7 együtthatóját.

29. Adjunk meg egy olyan másodfokú $f \in \mathbb{Z}_6[x]$ polinomot, melyre $f(x)(3x + 1)$ foka 2.

30. Bontsuk \mathbb{Z}_2 fölött irreducibilisek szorzatára az $x^8 + 1$ polinomot.

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

Mat. BSc.

Algebra1: 1. vizsga (keresztfélév)/5

2010. május 28.

II. rész (30 perc). Az alábbi tétel helyes kimondása és a teljes bizonyítás leírása összesen 4 pontot ér. A választ a túloldalon is folytathatja, kérjük, hogy a fenti helyre írja rá a **nevét** és az **ELTE-azonosítóját** nyomtatott nagybetűkkel.

31. **A hatvány rendjének képlete.** A képlet helyes kimondásáért 1 pont jár. Aki a tankönyvben szereplő bizonyítást ismerteti, annak be kell bizonyítania a felhasznált számelméleti segédállítást is („bolhás” feladat), de a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös nevezetes tulajdonságait nem.

OSZTÁLYZATOK: Elégtelent az kap, akinek az első vizsgarész első és utolsó 15 kérdéscsoportjának valamelyikéből nincs meg a 6 pontja, továbbá az is, akinek a második résszel együtt számított S összpontszáma kisebb, mint 14. A többiek osztályzata:

	<i>Osztályzat</i>
$S \leq 17$	2
$18 \leq S \leq 21$	3
$22 \leq S \leq 25$	4
$26 \leq S \leq 34$	5