Bsc algebra1 keresztféléves gyakorlat

Hetedik (utolsó, kétoldalas) feladatsor (2010. április 21 – május 12.)

Elméleti tudnivalók: Maradékos osztás, oszthatóság (3.2, 3.1), az irreducibilitás vizsgálatának fő eszközei (3.3, 3.5). Különösen érdemes megnézni a 111. oldalon lévő táblázatot.

3.3.16. *Adjuk meg az összes olyan tizenkettedfokú valós együtthatós polinomot, melynek az $1+i$ hatszoros gyöke.*

3.2.16. *Osszuk el maradékosan az x^3-2 polinomot $2x^2+2x-3$-mal.*

3.2.23. *Mi lesz a maradék, ha az x^4+x^2+1 polinomot elosztjuk x^2+x+1-gyel? A kapott eredményt indokoljuk meg számolás nélkül is.*

3.2.24. *Mi a maradék, ha $x^{64}+x^{54}+x^{14}+1$-et osztjuk x^2+1-gyel, illetve x^2-1-gyel?*

3.2.17. *Állapítsuk meg az $f(x)=3x^3+6x^2+6x+3$ és a $g(x)=2x^4+2x^2+2$ polinomok kitüntetett közös osztóját az euklideszi algoritmussal.*

3.1.29. *Igaz-e a $2x \mid 3x^2$ oszthatóság rendre a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ fölötti polinomok körében?*

3.1.6. *Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}[x]$-ben egy polinom akkor és csak akkor osztható egy egész számmal, ha minden együtthatója osztható vele.*

3.3.14. *Bontsuk $6(x^2-2)(x^2+1)$-et $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ fölött felbonthatatlanok szorzatára.*

3.5.4. *A Schönemann-Eisenstein kritérium az alábbi polinomok közül melyekre alkalmazható közvetlenül: $x^{11}+2x+18$, $x^{11}+2x+12$, $x^{11}+12x+5$, $x^{11}+n$ (mely n-ekre?).*

3.5.5. *Legyen f racionális együtthatós polinom. Igazoljuk, hogy f pontosan akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, ha valamelyik eltoltja (vagyis az $f(x+c)$ polinom, ahol $c\in\mathbb{Q}$) irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Igazoljuk ennek segítségével, hogy x^4+1 irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.*

3.3.22. *Bizonyítsuk be, hogy ha p prímszám, akkor az $(x+y)^p-x^p-y^p$ polinom osztható p-vel $\mathbb{Z}[x,y]$-ban. Vezessük le ebből a kis Fermat-tételt.*

3.5.15. *Legyen p prím és $f(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{p-1}$. Alkalmazható-e a Schönemann-Eisenstein az $f(x+1)$ polinomra?*

3.5.6. *A $6x^4+3x+1$ polinomot a 3 prímszám segítségével vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. A kapott gondolatmenetet próbáljuk meg általánosítani.*

3.3.19. *Irreducibilis-e x^4+4 illetve x^4+9 a $\mathbb{Q}$ fölött? Általánosítsunk!*

3.3.24. *Bontsuk fel az x^4-10x^2+1 polinomot $\mathbb{R}$ fölött felbonthatatlanok szorzatára (segítség a számoláshoz: a polinomnak gyöke a $\sqrt{2}+\sqrt{3}$). A kapott felbontást, és az alaptétel egyértelműségi állítását kihasználva adjuk meg a $\mathbb{Q}$ fölötti felbontást is.*

3.5.10. *Felbonthatatlan-e $\mathbb{Z}[x]$-ben az x^4+x+1 polinom? És $\mathbb{R}[x]$-ben?*

IHF. *Bontsuk $x^5-2x^4+3x^3+10x^2-2x+1$-et irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Q}$ fölött.*

Fagyejev-Szominszkij, 679*. *Igazoljuk, hogy az $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)-1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött, ha $a_1,\ldots,a_n$ páronként különböző egész számok.*

3.5.17*. *Van-e olyan $f(x)$ egész együtthatós polinom, hogy minden $g(x)$ egész együtthatós polinomra az $f\big(g(x)\big)$ polinom irreducibilis legyen $\mathbb{Q}$ fölött?*

Elméleti tudnivalók: Körosztási polinomok (3.9. szakasz).

3.9.4, 3.9.11. *Számítsuk ki Φ_{12}-t kétféleképpen, majd a prímhatvány-indexű körosztási polinomokat.*

3.9.18. *Határozzuk meg a körosztási polinomok felhasználásával rendre a 12-edik, 18-adik illetve 24-edik primitív egységgyökök összegét és szorzatát.*

3.9.12. *Igazoljuk, hogy ha $n > 1$ páratlan, akkor $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$.*

3.9.15*. *Legyenek $m \mid n$ pozitív egészek úgy, hogy n minden prímosztója osztja m-et is. Igazoljuk, hogy $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$.*

3.9.16. *Számítsuk ki az előző feladat alapján a $\Phi_n(x)$ polinomokat abban az esetben, amikor $n = 36, 72, 144, 100$.*

Elméleti tudnivalók: Absztrakt algebrai alapfogalmak (2.2. szakasz).

1.1.8, 1.1.9. *Írjuk föl a modulo 5 és a modulo 6 összeadás és szorzás táblázatát. Végezzük el a $2:3$ osztást modulo 5. Tudunk-e osztani $\mathbb{Z}_5$ minden nem nulla elemével? Igaz-e, hogy szorzat csak akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla? Mi a helyzet modulo 6?*

3.3.21. *Határozzuk meg a legfeljebb negyedfokú irreducibilis polinomokat $\mathbb{Z}_2$ felett.*

3.9.22. *Bontsuk az $x^{12} - 1$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ és $\mathbb{Z}_5$ felett.*

3.5.9. *Az $x^4 + x^2 + x + 1$ polinomot $\mathbb{Z}_2$ felett vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.*

2.4.19. *Mely m-ekre van $\mathbb{Z}_m[x]$-ben olyan polinom, melynek több gyöke van, mint a foka?*

2.2.35. *Az alábbi struktúrák gyűrűk-e? Ha igen, kommutatívak-e, egységelemesek-e, nullosztómentesek-e, testek-e, mik az invertálható elemeik?*

a) $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, $\{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ *a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.*

b) $\mathbb{C}[x]$ *páros fokú elemei és a 0 a polinomok szokásos összeadására és szorzására nézve.*

c) $\mathbb{R}[x]$ *legalább huszadfokú elemei és a 0 a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.*

d) $\mathbb{C}[x]$ *elemei a szokásos összeadásra, és a kompozícióra, mint szorzásra.*

2.2.22. *Igazoljuk, hogy tetszőleges gyűrűben $0r = r0 = 0$ és $(-r)s = -(rs)$.*

2.2.43. *Döntsük el az alábbi $\varphi : R_1 \to R_2$ leképezésekről, hogy tartják-e a megadott műveleteket.*

a) $R_1 = \mathbb{R}^+$, $R_2 = \mathbb{R}^\times$, $\varphi(x) = 2^x$.

b) $R_1 = \mathbb{R}^+$, $R_2 = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(x) = \cos x + i \sin x$.

c) $R_1 = \mathbb{C}^+$, $R_2 = \mathbb{C}^+$, $\varphi(x) = |x|$.

d) $R_1 = \mathbb{Z}_{100}^+$, $R_2 = \mathbb{Z}_{100}^+$, $\varphi(x) = 60 *_{100} x$.

e) $R_1 = \mathbb{Z}_{100}^+$, $R_2 = \mathbb{Z}_{100}^+$, $\varphi(x) = 60x$.