Bsc algebra1 keresztféléves gyakorlat

Ötödik feladatsor (2010. március 17 - 25.)

Elméleti tudnivalók: primitív komplex egységgyökök (K1.5). Ha egy z komplex számot hatványozni kezdünk, akkor vagy minden egész kitevőjű hatványa (páronként) különböző lesz, vagy a hatványok periódikusan ismétlődnek (példák az 1.5.15. Feladatban láthatók). A periódus hossza, vagyis a szám különböző hatványainak a száma a szám *rendje*, jele $o(z)$. A rend a legkisebb olyan pozitív kitevő, amelyre a számot emelve 1-et kapunk.

Nevezzük *jó kitevőnek* azokat a kitevőket, melyekre z-t emelve 1 az eredmény. Be lehet látni, hogy ezek pontosan a rend többszörösei. Tehát $z^k = 1$ akkor és csak akkor, ha $o(z) \mid k$. A periodicitást a következő képlet fejezi ki: $z^k = z^\ell \iff o(z) \mid k - \ell$. A hatvány rendjének képlete: $o(z^k) = o(z)/(o(z), k)$ (a nevezőben legnagyobb közös osztó szerepel).

Az r rendű komplex számok másik elnevezése: *primitív* r-edik egységgyök. Az előadáson szerepelni fog annak bizonyítása, hogy ezek pontosan azok, amelyek hatványaiként az összes r-edik egységgyök előáll, számuk pedig $\varphi(r)$ (a számelméletből ismert Euler-függvény).

1.5.15. *Az* 1, -1, i, $1+i$, $(1+i)/\sqrt{2}$, $\cos(\sqrt{2}\pi) + i\sin(\sqrt{2}\pi)$, $\cos(336°) + i\sin(336°)$ *számoknak mennyi a rendje? Melyek egységgyökök? Mely n-ekre lesznek ezek a számok n-edik egységgyökök? És primitív n-edik egységgyökök?*

1.5.20. *Szorozzuk össze a hatodik egységgyököket a negyedik egységgyökökkel az összes lehetséges módon. Hány különböző számot kapunk?*

1.5.17. *Mutassuk meg, hogy ha $n > 0$ egész, $\varepsilon \in \mathbb{C}$, és $\varepsilon^n = i$, akkor $4 \mid o(\varepsilon) \neq \infty$.*

1.5.18. *Ha ε primitív 512-edik egységgyök, mennyi lehet $o(-i\varepsilon)$?*

1.5.19. *Ha ε rendje osztható néggyel, mi lesz $-\varepsilon$ rendje?*

1.5.9. *Egy bolha ugrál körbe egy r-szög csúcsain, úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit lép előre. Hány lépés után jut vissza a kiindulóponthoz? Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen?*

2.2.46. *Bizonyítsuk be tetszőleges a, b valós számokra az alábbi binomiális tételt:*

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j =$$

$$= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n \,.$$

1.5.23. *Hozzuk „zárt alakra” a következő összeget:*

$$\binom{1867}{0} + \binom{1867}{4} + \binom{1867}{8} + \binom{1867}{12} + \ldots\,.$$

(Az utolsó tagban alul 1864 *szerepel, mert egy binomiális együttható értéke nulla, ha alul nagyobb szám van, mint fölül, és így az összeg tagjai egy idő után nullává válnak.)*

1.5.21. *Igazoljuk, hogy ha az n-edik primitív egységgyököket végigszorozzuk az m-edik primitív egységgyökök mindegyikével, akkor az mn-edik primitív egységgyököket kapjuk, mindegyiket pontosan egyszer. Vezessük le ebből, hogy az Euler-függvény multiplikatív.*