Bsc algebra1 keresztféléves gyakorlat

Negyedik feladatsor (2010. március 8 - 11.)

1. *Hány inverzió van az alábbi permutációkban, illetve a 'hátulról előre' permutációban?*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{pmatrix}$$

2. *Az $((a_{ij}))$ négyszer négyes mátrix determinánsának kiszámításakor mi lesz az alábbi tagok előjele: $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$, $a_{13}a_{34}a_{41}a_{22}$, $a_{22}a_{41}a_{34}a_{13}$?*

3. *Legyen M egy 3×3-as valós mátrix, melyre $M^T = -M$. Mutassuk meg, hogy a determinánsa nulla. A 3 helyett milyen n egészekre lesz biztosan igaz az analóg állítás?*

4. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy n-edrendű, komplex elemű determinánsban a_{ij} az a_{ji} konjugáltja minden i, j-re, akkor a determináns értéke valós.*

5*. *Legyen M egész számokból álló négyzetes mátrix. Igazoljuk, hogy M^{-1} akkor és csak akkor áll csupa egész számból, ha $\det M \in \{1, -1\}$.*

6. *Invertáljuk Gauss-elimináció segítségével az alábbi mátrixokat. Ellenőrizzük szorzással a kapott eredményeket. Írjuk fel a harmadik és a negyedik mátrix inverzét a ferde kifejtési tételből kapott képlet segítségével is.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. *Lineárisan függetlenek-e az alábbi mátrixok oszlop-, illetve sorvektorai? Mennyi ezeknek a mátrixoknak a sor-, illetve oszloprangja?*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

8. *Igazoljuk az alábbiakat.*

a) Ha egy vektorrendszerben szerepel a nullvektor, akkor az nem lehet független.

b) $\{v\}$ akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$. Mikor lesz független $\{v, w\}$?

c) Ha $\{v_1, v_2, v_3\}$ független, akkor $\{v_1 - 3v_2, v_2, v_3\}$ is független.

9. *Oldjuk meg a Cramer-szabállyal az $x + y = 1$, $x + 2y = 2$ egyenletrendszert.*

10*. *Egy városban az emberek karácsonykor ajándékot küldenek egymásnak. Az elmúlt évben mindenki páratlan sok embernek küldött ajándékot, és a statisztikákból az is kiderült, hogy bárhogy is veszünk két (különböző) embert, azoknak az embereknek a száma, akiket mindketten megajándékoztak, páratlan. Igazoljuk, hogy mindenki páratlan sok ajándékot kapott.*