

Bsc algebra1 keresztfélèves gyakorlat
 Harmadik feladatsor (2010 febr. 22 – március 4)

1. Adjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszerek **általános** megoldását. Az első egyenletrendszer mely megoldásában minimális az ismeretlenek négyzetösszege?

$$\begin{array}{lcl}
 2x - 3y + 6z = 14 & \text{IHF:} & x - y + z + t = 2 \\
 -3x \quad \quad + 2z = 3 & & -3x \quad \quad + 3t = 0 \\
 x - 6y + 14z = 31 & & -2x - y + z + 4t = 2 \\
 & & 4x - y + z - 2t = 2
 \end{array}$$

2. Tekintsünk egy n ismeretlenes, m egyenletből álló, \mathbb{R} feletti lineáris egyenletrendszert, melynek t (valós) megoldása van ($t = \infty$ is lehetséges). Töltsük ki az alábbi táblázatokat: I jelentse azt, hogy ilyen eset előfordulhat, N pedig azt, hogy nem.

Általános	$t = 0$	$t = 1$	$t = \infty$	Homogén	$t = 0$	$t = 1$	$t = \infty$
$n < m$				$n < m$			
$n = m$				$n = m$			
$n > m$				$n > m$			

3. Adott 2008 szám úgy, hogy közülük bármely 2007 összege 2008. Melyek ezek a számok?

4. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat az első sor szerinti kifejtéssel, az utolsó oszlop szerinti kifejtéssel, a felső háromszög alakra hozás módszerével, végül a 3×3 -asokat a Sarrus-szabállyal is.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

5. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{IHF:} \quad \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$

6. Egy 2006×2006 -es determináns minden sora számtani sorozat. Mennyi az értéke?

7. Egy determinánsban minden oszlopösszeg osztható héttel. Igazoljuk, hogy a determináns értéke is osztható héttel.

8. Egy 3×3 -as determináns egyjegyű számokból áll. Minden sorban a három számjegyből alkotott háromjegyű szám héttel osztható. Igazoljuk, hogy a determináns osztható héttel.

9. Igazoljuk, hogy ha egy $n \times n$ -es mátrixban van egy $m \times k$ -as téglalap csupa nullákból, és $m + k > n$, akkor a mátrix determinánsa nulla.