Bsc algebra1 keresztféléves gyakorlat

Második feladatsor (2010 febr. 15–18)

1.5.14. *Oldjuk meg az $x^3 = 2$ és az $x^4 = -9$ egyenleteket a komplex számok között. Adjuk meg az $x^8 = \sqrt{3} - i$, $x^n = -1$ egyenletek összes megoldását is.*

1.5.24. *Fejezzük ki* $\cos x$ *és* $\sin x$ *segítségével* $\sin 7x$*-et.*

1.5.22. *Számítsuk ki az n-edik egységgyökök összegét, szorzatát és négyzetösszegét.*

1.4.12. *Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk. Kössük össze az átellenes oldalakra rajzolt négyzetek középpontjait. Mutassuk meg, hogy az így kapott két szakasz merőleges és egyenlő hosszú.*

1. *Az AB, BA, BC, $CB - C$ műveletek közül végezzük el az elvégezhetőket, ha*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. *Adjunk meg olyan 10×10-es $A \neq B$ mátrixokat és egy 10×100-as $C \neq 0$ mátrixot, amelyekre $AC = BC$ teljesül. Meg lehet-e adni az $A \neq B$ mátrixokat úgy is, hogy ez* **minden** *10×100-as C-re teljesüljön?*

3. *Számítsuk ki az 5×5-ös $N = ((n_{ij}))$ mátrix első öt hatványát, ahol $n_{ij} = 1$, ha $i - j = 1$, és 0 egyébként. Tegyük fel, hogy egy $n \times n$-es $M = ((m_{ij}))$ mátrix főátlójában és ez alatt csupa nulla van (azaz $m_{ij} = 0$ ha $i \geq j$). Bizonyítsuk be, hogy $M^n = 0$.*

4. *Bizonyítsuk be, hogy két felső háromszög-mátrix szorzata is felső háromszög-mátrix. Mi áll a szorzat diagonálisában?*

5. *Számítsuk ki az alábbi szorzatokat.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2, \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

6. *Jelölje $E^{(ij)}$ azt a mátrixot, amelynek i-edik sorában a j-edik elem 1, és minden más eleme 0. Mi történik, ha egy mátrixot balról illetve jobbról megszorzunk $E^{(ij)}$-vel? Van-e olyan 3×3-as A mátrix, amellyel a balszorzás tetszőleges 3×3-as X mátrix első sorának elemeit megkétszerezi, az X többi elemét pedig ellentettjére változtatja? Van-e ilyen A akkor, ha balszorzás helyett jobbról akarunk szorozni?*

IHF. *Az M és N mátrixok* **felcserélhetők,** *ha $MN = NM$. Keressük meg az összes olyan háromszor hármas mátrixot, amely az $E^{(23)}$-mal felcserélhető (lásd az előző feladatot), és azokat is, amelyek* **minden** *háromszor hármas mátrixszal felcserélhetők.*

Gondolkodtató általános iskolai feladatok

7. *Pistikének húsz tolla van, köztük piros is. Bármely öt toll között van két egyforma színű, és bármely tíz között legfeljebb öt egyforma színű lehet. Hány piros tolla van?*

8. *Hány számjegyből áll $25^{25} \cdot 2^{50}$?*

9. *Egy tábla csokoládé $4 \cdot 9$ kis téglalapra van osztva. A csokoládét szét szeretnénk osztani egy kirándulás 36 résztvevője között. Mindig kezünkbe veszünk egy darabot, és egy osztás mentén eltörjük. Milyen stratégiával csináljuk, hogy minél kevesebb törést kelljen végezni?*