Bsc algebra1 keresztféléves gyakorlat

Első feladatsor (2010 febr. 8–11)

A háromjegyű sorszámok a Kiss-jegyzetre utalnak, melyben a megoldások is elolvashatók (a megoldások ingyen letölthetők).

1. *Alakítsuk szorzattá az* $a^3 - b^3$, *az* $a^3 + b^3$ *és az* $x^2 - 8x + 15$ *kifejezéseket.*

1.2.4. *Adjuk meg az* $u+v = 8$, $uv = 15$ *egyenletrendszer* **összes** *valós megoldását. Tegyük meg ugyanezt az* $u + v = 14$, $uv = 49$ *egyenletrendszer esetében is.*

2. *Gyöktelenítsük az alábbi törtek nevezőjét:*

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}, \qquad \frac{1}{1-\sqrt[3]{2}}, \qquad \frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}, \qquad \frac{1}{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}.$$

1.3.11. *Végezzük el az alábbi műveleteket:* $(1 + i)(3 - 2i)$, $1/i$, $(1 + i)/(3 - 2i)$, $|\overline{(4 + i)}/(4 + i)|$, $|(1 + 1526i)^{100}/(1 - 1526i)^{100}|$, $(1 + i)^2$, $(1 + i)^{1241}$, $(-1 + i\sqrt{3})^3$.

3. *Mutassuk meg, hogy ha az* m *és* n *egész számok előállnak két négyzetszám összegeként, akkor* mn *is előáll így.*

1.3.12. *Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok között.* $x^2+1 = 0$, $x^2 = -12$, $x^2 + 2x + 2 = 0$, $x^2 + 2ix - 1 = 0$.

1.3.13. *Határozzuk meg azokat a* $c + di$ *számokat, melyek négyzete* $20i - 21$. *Oldjuk meg az* $x^2 + (i - 2)x + (6 - 6i) = 0$ *egyenletet.*

1.4.9. *Rajzoljuk le a komplex számsíkon a következő halmazokat:* $\{z : \mathrm{Re}(z + 2i) \le -2\}$, $\{z : \mathrm{Re}(z + 1) \ge \mathrm{Im}(z - 3i)\}$, $\{z : |z - i - 1| \le 3\}$, $\{z : |z - 3 + 2i| = |z + 4 - i|\}$, $\{z : z + \overline{z} = -1\}$, $\{z : 2z + 5 = 2\overline{z}\}$, $\{z : 1/z = \overline{z}\}$, $\{z : (1/z) + 8 = \overline{z}\}$, $\{z : |z| = iz\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}((z - 1)/(z + 1)) = 0\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}((z - 1)/(z + 1)) = 0\}$.

4. *Mutassuk meg, hogy egy paralelogramma oldalai hosszának négyzetösszege ugyanaz, mint az átlói hosszának négyzetösszege.*

1.4.2, 1.4.8. *Írjuk fel az alábbi számokat trigonometrikus alakban:* $1 + i$, $1 - i$, $\sqrt{3} + i$, $-1 - \sqrt{3}i$, $\cos(60°) - i\sin(60°)$, $\cos\alpha - i\sin\alpha$, $\cos(30°) - i\sin(60°)$, $\sin\alpha + i\cos\alpha$.

5. *A sík* (x, y) *pontját* $+90$ *fokkal elforgatjuk az origó körül. Melyik pont lesz az eredmény? És ha* $+60°$*-kal forgatunk? És ha nem az origó körül, hanem az* $(1, 2)$ *pont körül forgatunk?*

1.4.10. *A sík mely geometriai transzformációinak felelnek meg a komplex számok halmazának alábbi leképezései:* $z \to 3z + 2$, $z \to (1 + i)z$.

1.4.11. *Legyenek* z *és* w *különböző komplex számok. Írjuk fel az őket összekötő szakasz felezőpontját, valamint annak a két szabályos háromszögnek a harmadik csúcsát, illetve a középpontját, melyeknek az adott két szám két csúcsa.*

1.4.13*. *Írjunk egy háromszög mindegyik oldalára kifelé egy szabályos háromszöget. Igazoljuk, hogy ezek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak.*

IHF. *Milyen alakzatot alkotnak azok a* z *pontok a síkon, melyekre* $(z-i)i/(z-1)$ *negatív valós szám?*