Hogyan készüljünk írásbeli vizsgára?

Hallgatókkal való beszélgetésekből kiderült, hogy sokan rossz módszerrel készülnek fel a vizsgára. Egy konkrét vizsgadolgozat (2009. január 7, Algebra1 alapszint) elemzésével megpróbálunk tanácsot adni a tanuláshoz.

A matematika fő vonása a precízség (logikai értelemben is). Ehhez hozzátartozik, hogy az állításait (vitathatatlanul) bebizonyítja. Ezért bármilyen matematikus diploma azt is igazolja, hogy a birtokosa egy gondolatmenetről el tudja dönteni, hogy az helyes-e, azaz bizonyítja-e az adott állítást, továbbá hogy képes maga is egyszerű bizonyításokat produkálni. Ennek a tudásnak része, hogy a tételeket (ismerje, és) helyesen tudja alkalmazni. Ezt összefoglalva úgy szoktuk mondani, hogy **értse** a tananyagot.

Ugyanakkor a matematikaoktatás sok esetben konkrét algoritmusok (sokszor vak) alkalmazását gyakoroltatja be. Ez bizonyos esetekben helyes is. A zárthelyikben néhány ilyen algoritmus ismerete elegendő lehet az elégséges jegyhez az anyag értése nélkül is.

A vizsgán való gyengébb szereplés oka sokszor az, hogy a hallgatók úgy gondolják: a vizsgára is konkrét algoritmusok (azaz feladattípusok) gyakorlásával kell készülni. Ez **súlyos tévedés.** A korábbi vizsgadolgozatok csak az alább leírt módszerrel megszerzett tudás tesztelésére, **ellenőrzésére** valók, készülni **nem** azok alapján kell.

A vizsgára a fogalmak (definíciók), az állítások (tételek) és a bizonyítások megértésével kell készülni. Bizonyítás tanulásakor minden mondat esetében át kell gondolni, hogy az előzőekből miért és hogyan következik (az egyszerűbb bizonyításokat némi rutin birtokában érdemes megpróbálni kitalálni). Aki ezt nem teszi, az nem szerez gyakorlatot a **következtetésben,** és ezért a vizsgakérdéseket nem fogja tudni megválaszolni. A bizonyítás ismeretében könnyebb visszaemlékezni a tétel apró de lényeges részleteire is. Tipikus vizsgakérdések a következők.

- Egy adott szituáció egy definíciónak eleget tesz-e, vagy sem? Adjunk példát, ahol ez a fogalom teljesül, vagy nem teljesül. (Ilyen példák sokszor az előadásokon és a tankönyvekben is szerepelnek.)
- Alkalmazzunk egy tételt adott szituációra. Adjunk példát, amikor a tétel bizonyos feltételei teljesülnek (nem teljesülnek). Ismerjük fel, hogy melyik tételt érdemes alkalmazni.

Az alábbi elemzésben mindegyik vizsgakérdéshez megadjuk, hogy annak megválaszolásához melyik tanult definíciót vagy tételt hogyan kell alkalmazni. A tételeket nem fogalmazzuk meg precízen, mert az túl sok helyet foglalna, helyette csak utalunk rájuk, és zárójelben odaírjuk a megfelelő hivatkozást (F=Freud Róbert: *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös kiadó, 2006, K=Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába*, TypoTEX, 2007).

1. *Mennyi* $i(2-3i)$ *konjugáltjának képzetes része?*

Megoldás. -2. Komplex szám konjugáltjának és képzetes részének fogalma, továbbá komplex számok szorzásának definíciója (K12–14. oldal).

2. *Mennyi* $\cos(-30°) - i\sin(-30°)$ *(0 és 360 fok közötti) szöge?*

Megoldás. 30°. A trigonometrikus alak **precíz** definíciója, illetve komplex szám konjugáltjának szöge (vagy a $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ és $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ azonosságok). Az $r\big(\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)\big)$, az $r\big(\sin(\alpha) + i\cos(\alpha)\big)$ és a $(-3)\big(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\big)$ egyike sem trigonometrikus alak (K18. oldal és K1.4.8 is).

3. *Ha z szöge $50°$, mennyi $-2008/z$ szöge?*

Megoldás. $130°$. Komplex számok hányadosának szöge (K1.4.6), -2008 trigonometrikus alakja (vö. K1.5.14 (2)).

4. *Melyik komplex szám lesz a $-1+2i$-nek az origó körüli -90 fokos elforgatottja?*

Megoldás. $2+i$. Komplex számmal szorzás, mint geometriai transzformáció (forgatva nyújtás, K1.4.5). Jelen esetben $-i$-vel kell szorozni.

5. *Mennyi $\big(\cos(10°)+i\sin(10°)\big)^{-2}$ rendje?*

Megoldás. 18. Negatív egész kitevőjű hatvány definíciója, hatvány trigonometrikus alakja (K20. oldal). A rend leolvasása a trigonometrikus alakból (K1.5.11). Természetesen a rendet ki lehet számítani közvetlen hatványozással is a definíció alapján (vö. K1.5.8).

6. *Írjunk föl egy olyan, három egyenletből álló, kétismeretlenes lineáris egyenletrendszert, melynek pontosan egy megoldása van.*

Megoldás. $\{x=1,\ y=2,\ x+y=3\}$. Ha közvetlenül nem megy, először az egyenletrendszer mátrixát érdemes felírni redukált lépcsős alakban, mert arról könnyű leolvasni a megoldások számát (F59–60. oldal). Egyenleteket úgy lehet szaporítani, hogy bevesszük korábbi egyenletek lineáris kombinációit, ilyenkor a megoldások halmaza nem változik.

7. *Legyen $A\in\mathbb{R}^{6\times 3}$ és $B\in\mathbb{R}^{4\times 2}$. Hányszor hányas C mátrixokra értelmes az ACB kifejezés?*

Megoldás. 3×4. Mikor szorozható össze két mátrix: F.2.1.4Def.

8. *Ha* $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}N=\begin{pmatrix}1&3&2\\0&0&0\end{pmatrix}$, *akkor mi az N második sorának harmadik eleme?*

Megoldás. 2. Mátrixszorzás képlete (F.2.1.4Def).

9. *Számítsuk ki* $\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}$ *inverzét.*

Megoldás. $\begin{pmatrix}1&-1\\0&1/2\end{pmatrix}$. Mátrix inverzének képlete (F2.2.3Lemma).

10. *Mely a,b,c,d számok esetén invertálható az* $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&d\end{pmatrix}$ *szorzatmátrix?*

Megoldás. Nincs ilyen a,b,c,d. *Első indoklás:* a szorzatot kiszámítva annak determinánsa nulla (invertálhatóság jellemzése a determináns segítségével, F2.2.2T). *Második indoklás:* Az invertálhatóság jellemzése a rang segítségével (F3.5.2T), szorzat rangjának becslése (F5.7.12Feladat).

11. *Mennyi az* $\begin{pmatrix}x\,v\,u\,y\\u\,x\,y\,v\end{pmatrix}$ *permutációban az inverziók száma?*

Megoldás. 3 (ezek ux, uv, yv). Az inverzió definíciója (F1.1.1Def).

12. *Írjuk fel a determinánst definiáló (n! tagú) szummát.*

Megoldás. F1.2.2Def.

13. *Ha az $M \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$ mátrix determinánsa d, akkor mennyi lesz* $\det(M+M)$*?*

Megoldás. $32d$. Két mátrix összegének definíciója (F2.1.2Def). Ha egy skalárral megszorozzuk a determináns egy sorát, akkor hogyan változik a determináns értéke (F1.3.1T).

14. *Hogyan változik egy háromszor hármas mátrix determinánsa, ha a középpontjára tükrözzük?*

Megoldás. Nem változik (mert ez egy oszlop- és egy sorcsere egymásutánja). A determináns sor-, illetve oszlopcserénél előjelet vált (F1.3.5T, F1.3.6T). Az eredmény a determináns definíciójának felírásából is azonnal látszik.

15. *Írjuk föl az* $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ *determináns egy tetszőleges ferde kifejtését (az összeg tagjait).*

Megoldás. $3\cdot 4 + 4\cdot(-3)$ (a második sor elemeivel szoroztuk az első sor elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokat). Ferde kifejtési tétel (F1.4.3T).

16. *Egy 5×3-as mátrixnak van két lineárisan független sora. Mik a rangjának a lehetséges értékei?*

Megoldás. 2 és 3. A rang definíciója (F3.4.1Def, F3.4.2T) szerint a(z oszlop)rang legfeljebb 3 (mert 3 oszlop van). Mivel van két független sor, a (sor)rang legalább 2.

17. *Adjunk példát két olyan másodfokú polinomra, melyek összegének nincs foka.*

Megoldás. Például x^2 és $-x^2$. Polinom foka (K35. oldal, a nullapolinom az egyetlen, aminek nincsen foka).

18. *Adjunk példát olyan polinomra, amelynek az 1 kétszeres gyöke, és van nem valós gyöke is.*

Megoldás. $(x-1)^2(x-i)$. Többszörös gyök (K2.5.5), gyöktényező (K2.4.6). Figyelni kell arra, hogy az 1 pontosan kétszeres gyök legyen. Ez igaz, mert $x-i$-nek már nem gyöke.

19. *Adjunk példát olyan negyedfokú, valós együtthatós polinomra, melynek $1+i$ kétszeres gyöke.*

Megoldás. $(x-1-i)^2(x-1+i)^2 = (x^2-2x+2)^2$. Az előző feladat megoldásában elmondottakhoz még hozzá kell tenni, hogy valós együtthatós polinomok esetében a konjugált ugyanannyiszoros gyök (K3.3.6).

20. *Mennyi az $5x^6+3x^5+2$ polinom gyökeinek az összege?*

Megoldás. $-3/5$. Gyökök és együtthatók összefüggése (K2.5.9).

21. *Mi a maradék, ha $f(x) = x^{2008} + 2008$-at maradékosan elosztjuk $2008x - 2008$-cal?*

Megoldás. 2009. Ha $f(x) = (2008x-2008)q(x)+r(x)$, akkor a maradékos osztás definíciója (lásd K3.2.1) szerint $r(x)$ konstans polinom. Értéke az 1 behelyettesítésével kapható (mert $2008x-2008$-nek gyöke az 1). Lásd a K3.2.24 gyakorlatot is.

22. *Soroljuk fel* $x^7 + x^5 + x^2 + 1$ *racionális gyökeit.*

Megoldás. -1. A racionális gyökteszt (K3.3.10) alapján az 1-et és a -1-et kell kipróbálni.

23. *Hány irreducibilis polinom szorzata valós fölött* $x^{22} + 1$*?*

Megoldás. 11. Alkalmazzuk a valós fölötti irreducibilis polinomokat leíró tételt (K3.3.8). Valós gyök nincs, mert a polinom végig pozitív, ezért elsőfokú tényező sincs valós felett (K3.3.3). Ezért mindegyik irreducibilis tényező másodfokú. A szorzatpolinom fokáról szóló állítás (K2.1.5) miatt számuk 22/2.

24. *Írjunk föl egy olyan hatodfokú, nem irreducibilis polinomot* $\mathbb{Q}$ *fölött, melynek nincs racionális gyöke.*

Megoldás. Például $(x^2 + 1)^3$ (mindenütt pozitív). Lásd K96. oldal.

25. *Adjunk meg olyan* m *egészet, melyre* $7x^6 + mx^3 + 42x^2 + 420$ *teljesíti a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltételét.*

Megoldás. 3 (lásd K3.5.2). A 42 miatt p csak 2, 3, 7 lehet. Utóbbit a főegyüttható zárja ki, a $4 \mid 420$ pedig a $p = 2$-t. Tehát csak $p = 3$ lehet, ami akkor jó, ha $3 \mid m$.

26. *Bontsuk irreducibilisek szorzatára a* $10x^2 - 40$ *polinomot* $\mathbb{Z}$ *fölött. Hány irreducibilis tényező keletkezik?*

Megoldás. $2 \cdot 5(x-2)(x+2)$, azaz 4 tényező. A $\mathbb{Z}[x]$ irreducibilis elemeinek leírása (K3.4.8).

27. *Számítsuk ki* $1/(3 + 4)$ *értékét a* $\mathbb{Z}_5$ *testben.*

Megoldás. 3 (lásd K4–6. oldal), $3 +_5 4 = 2$ és $1/2 = 3$, mert $3 *_5 2 = 1$.

28. *Adjunk példát nullosztóra a* $\mathbb{Z}_{15}$ *gyűrűben.*

Megoldás. Például 3, mert itt 3 és 5 szorzata nulla de $3 \neq 0$ (K2.2.27, K2.2.31).

29. *Bontsuk az* $x^3 + 1$ *polinomot irreducibilisek szorzatára a* $\mathbb{Z}_3$ *test fölött.*

Megoldás. $(x+1)^3$ (tagonként lehet köbre emelni, lásd K3.3.22), test fölött minden elsőfokú polinom irreducibilis (K3.3.1).

30. *Hány valós gyöke van az* $x^3 - 3x + 4$ *polinomnak?*

Megoldás. 1, mert $D = (q/2)^2 + (p/3)^3 = 3 > 0$ (Cardano-képlettel, lásd K3.8.2).