Bsc algebra1 gyakorlat

Kilencedik feladatsor (2010. dec. 8 – 9.)

2. ZH: `http://www.cs.elte.hu/~agoston/bboard/ma10osz1/zh2taj.html`

Elméleti tudnivalók: primitív komplex egységgyökök (K1.5). Ha egy z komplex számot hatványozni kezdünk, akkor vagy minden egész kitevőjű hatványa (páronként) különböző lesz, vagy a hatványok periódikusan ismétlődnek (példák az 1.5.15. Feladatban láthatók). A periódus hossza, vagyis a szám különböző hatványainak a száma a szám *rendje*, jele $o(z)$. A rend a legkisebb olyan pozitív kitevő, amelyre a számot emelve 1-et kapunk.

Nevezzük *jó kitevőnek* azokat a kitevőket, melyekre z-t emelve 1 az eredmény. Be lehet látni, hogy ezek pontosan a rend többszörösei. Tehát $z^k = 1$ akkor és csak akkor, ha $o(z) \mid k$. A periodicitást a következő képlet fejezi ki: $z^k = z^\ell \iff o(z) \mid k - \ell$. A hatvány rendjének képlete: $o(z^k) = o(z)/(o(z), k)$ (a nevezőben legnagyobb közös osztó szerepel).

Az r rendű komplex számok másik elnevezése: *primitív* r-edik egységgyök. Ezek pontosan azok a számok, amelyek hatványai az összes r-edik egységgyöt adják, számuk pedig $\varphi(r)$ (a számelméletből ismert Euler-függvény).

A $\Phi_n(x)$ körosztási polinom az a $\varphi(n)$ fokú polinom, melynek gyökei a primitív n-edik egyéggyökök (K3.9). Ez egész együtthatós, kiszámítása az $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$ képlettel, rekurzívan történhet. A körosztási polinom irreducibilis $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Q}$ fölött.

1. ***(1.5.15)*** Az 1, -1, i, $1+i$, $(1+i)/\sqrt{2}$, $\cos(\sqrt{2}\pi) + i\sin(\sqrt{2}\pi)$, $\cos(336°) + i\sin(336°)$ számoknak mennyi a rendje? Melyek egységgyökök? Mely n-ekre lesznek ezek a számok n-edik egységgyökök? És primitív n-edik egységgyökök?

2. ***(1.5.17)*** Mutassuk meg, hogy ha $n > 0$ egész, $\varepsilon \in \mathbb{C}$, és $\varepsilon^n = i$, akkor $4 \mid o(\varepsilon) \neq \infty$.

3. ***(1.5.18)*** Ha ε primitív 512-edik egységgyök, mennyi lehet $o(-i\varepsilon)$?

4. ***(1.5.19)*** Ha ε rendje osztható néggyel, mi lesz $-\varepsilon$ rendje?

5. ***(1.5.20)*** Szorozzuk össze a hatodik egységgyököket a negyedik egységgyökökkel az összes lehetséges módon. Hány különböző számot kapunk?

6. ***(1.5.21)*** Igazoljuk, hogy ha az n-edik primitív egységgyököket végigszorozzuk az m-edik primitív egységgyökök mindegyikével, akkor az mn-edik primitív egységgyököket kapjuk, mindegyiket pontosan egyszer. Vezessük le ebből, hogy az Euler-függvény multiplikatív.

7. ***(1.5.9)*** Egy bolha ugrál körbe egy r-szög csúcsain, úgy, hogy minden ugrásnál k csúcsnyit lép előre. Hány lépés után jut vissza a kiindulóponthoz? Hány kört tesz meg ezalatt? Hány csúcsot érint összesen? Vezessük le a kapott észrevételekből a hatvány rendjének képletét.

---

8. ***(3.9.4, 3.9.11)*** Számítsuk ki Φ_{12}-t kétféleképpen, majd a prímhatvány-indexű körosztási polinomokat.

9. ***(3.9.18)*** Határozzuk meg a körosztási polinomok felhasználásával rendre a 12-edik, 18-adik illetve 24-edik primitív egységgyökök összegét és szorzatát.

10. ***(3.9.12)*** Igazoljuk, hogy ha $n > 1$ páratlan, akkor $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$.

11. ***(3.9.15*)*** Legyenek $m \mid n$ pozitív egészek úgy, hogy n minden prímosztója osztja m-et is. Igazoljuk, hogy $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$.

12. ***(3.9.16)*** Számítsuk ki az előző feladat alapján a $\Phi_n(x)$ polinomokat abban az esetben, amikor $n = 36, 72, 144, 100$.