Bsc algebra1 gyakorlat

Nyolcadik feladatsor (2010. nov. 24 – dec. 6.)

Oszthatóság (3.2, 3.1), az irreducibilitás vizsgálatának fő eszközei (3.3, 3.5). Különösen érdemes megnézni a 111. oldalon lévő táblázatot.

1. ***(3.1.29)*** Igaz-e a $2x \mid 3x^2$ oszthatóság rendre a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ fölötti polinomok körében?

2. ***(3.1.6)*** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}[x]$-ben egy polinom akkor és csak akkor osztható egy egész számmal, ha minden együtthatója osztható vele.

3. ***(3.3.14)*** Bontsuk $6(x^2-2)(x^2+1)$-et $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ fölött felbonthatatlanok szorzatára.

4. ***(3.5.4)*** A Schönemann-Eisenstein kritérium az alábbi polinomok közül melyekre alkalmazható közvetlenül: $x^{11}+2x+18$, $x^{11}+2x+12$, $x^{11}+12x+5$, $x^{11}+n$ (mely n-ekre?).

5. ***(3.5.5)*** Legyen f racionális együtthatós polinom. Igazoljuk, hogy f pontosan akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, ha valamelyik eltoltja (vagyis az $f(x+c)$ polinom, ahol $c \in \mathbb{Q}$) irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Igazoljuk ennek segítségével, hogy x^4+1 irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

6. ***(3.5.6)*** A $6x^4+3x+1$ polinomot a 3 prímszám segítségével vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. A kapott gondolatmenetet próbáljuk meg általánosítani.

7. ***(3.5.10)*** Felbonthatatlan-e $\mathbb{Z}[x]$-ben az x^4+x+1 polinom? És $\mathbb{R}[x]$-ben?

8. ***(IHF)*** Bontsuk $x^5-2x^4+3x^3+10x^2-2x+1$-et irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Q}$ fölött.

---

9. ***(1.1.8, 1.1.9)*** Írjuk föl a modulo 5 és a modulo 6 összeadás és szorzás táblázatát. Végezzük el a $2:3$ osztást modulo 5. Tudunk-e osztani $\mathbb{Z}_5$ minden nem nulla elemével? Igaz-e, hogy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla? Mi a helyzet modulo 6?

10. ***(3.3.21)*** Határozzuk meg a legfeljebb negyedfokú irreducibilis polinomokat $\mathbb{Z}_2$ felett.

11. ***(3.9.22)*** Bontsuk az $x^{12}-1$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ és $\mathbb{Z}_5$ felett.

12. ***(3.5.9)*** Az x^4+x^2+x+1-t $\mathbb{Z}_2$ felett vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

---

13. Fejezzük ki a másodfokú egyenlet együtthatóival a gyökök különbségének négyzetét.

14. ***(3.3.15)*** Mi lesz x^n-1 és x^m-1 legnagyobb közös osztója?

15. Mi lesz x^5+1 és $x^{15}-1$ legnagyobb közös osztója?

16. ***(3.2.17)*** Állapítsuk meg az $f(x)=3x^3+6x^2+6x+3$ és a $g(x)=2x^4+2x^2+2$ polinomok kitüntetett közös osztóját az euklideszi algoritmussal.

17. Bontsuk az $x^{12}-4096$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben és $\mathbb{R}[x]$-ben.

18. ***(3.3.19)*** Irreducibilis-e x^4+4 illetve x^4+9 a $\mathbb{Q}$ fölött? Általánosítsunk!

19. ***(3.3.24)*** Bontsuk fel az x^4-10x^2+1 polinomot $\mathbb{R}$ fölött felbonthatatlanok szorzatára (segítség a számoláshoz: a polinomnak gyöke a $\sqrt{2}+\sqrt{3}$). A kapott felbontást, és az alaptétel egyértelműségi állítását kihasználva adjuk meg a $\mathbb{Q}$ fölötti felbontást is.

20. ***(3.3.22)*** Bizonyítsuk be, hogy ha p prímszám, akkor az $(x+y)^p-x^p-y^p$ polinom osztható p-vel $\mathbb{Z}[x,y]$-ban. Vezessük le ebből a kis Fermat-tételt.

21. ***(3.5.15)*** Legyen p prím és $f(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{p-1}$. Alkalmazható-e a Schönemann-Eisenstein az $f(x+1)$ polinomra?

22. Adjunk példát, ami mutatja, hogy $\mathbb{Z}_6$ fölött nem igaz a polinomok azonossági tétele.