

Bsc algebra1 gyakorlat

Hetedik feladatsor (2010. nov. 17–22.)

Gyökök és együtthatók összefüggése (2.5.8), interpoláció (2.4.12), maradékos osztás (3.2.1).

1. **(3.3.16)** Adjuk meg az összes olyan tizenkettedfokú valós együtthatós polinomot, melynek az $1 + i$ hatszoros gyöke.

2. Bontsuk \mathbb{Z}_2 fölött gyöktényezős alakra az $x^8 + 1$ polinomot.

3. Hány olyan legfőbb negyedfokú polinom van $\mathbb{Z}_2[x]$ -ben, melynek minden behelyettesítési értéke 1?

4. **(2.4.14, HF)** Adjunk meg a Lagrange- és a Newton-interpoláció segítségével is olyan legfőbb harmadfokú polinomot, amelyre $f(0) = 3$, $f(1) = 3$, $f(4) = 15$ és $f(-1) = 0$.

5. **(2.4.20*)** Létezik-e olyan $f \in \mathbb{Z}[x]$, melyre $f(10) = 400$, $f(14) = 440$ és $f(18) = 520$?

6. **(2.5.7)** Számítsuk ki x alábbi két polinomjának az együtthatóit: $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$ és $c(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)(x - b_4)$.

7. **(2.5.14)** Határozzuk meg a $2x^4 + 2x + 3$ polinom komplex gyökeinek összegét, szorzatát, négyzetösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét.

8. **(2.5.15)** A gyökök és együtthatók összefüggése alapján számítsuk ki az n -edik egységgyökök összegét, négyzetösszegét és szorzatát.

9. **(2.7.16)** Legyenek a, b, c az $x^3 + 3x + 1$ polinom gyökei. Írjuk fel azt a harmadfokú polinomot, melynek gyökei a^2, b^2, c^2 , illetve $a + b, a + c, b + c$.

10. **(2.7.15, HF)** Határozzuk meg az $x^n + x + 1$ polinom (komplex) gyökeinek négyzetösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét ($n \geq 2$).

11. **(IHF)** Legyenek x_1, x_2, x_3, x_4 az $x^4 - 2x + 3$ polinom komplex gyökei (a többszörös gyököket, ha vannak, annyiszor felsorolva, ahányszorosak). Számítsuk ki az $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ összeget, valamint a gyökök reciprokainak összegét.

12. **(3.2.16)** Osszuk el maradékosan az $x^3 - 2$ polinomot $2x^2 + 2x - 3$ -mal.

13. **(3.2.23)** Mi lesz a maradék, ha az $x^4 + x^2 + 1$ polinomot elosztjuk $x^2 + x + 1$ -gyel? A kapott eredményt indokoljuk meg számolás nélkül is.

14. **(3.2.24)** Mi a maradék, ha $x^{64} + x^{54} + x^{14} + 1$ -et osztjuk $x^2 + 1$ -gyel, illetve $x^2 - 1$ -gyel?

15. Végezzük el az $(x^6 + x + 1) : (x^2 + x + 1)$ maradékos osztást \mathbb{Z}_2 fölött.

Gyakorló vizsgakérdések

16. Legyenek A, B, C olyan $n \times n$ -es mátrixok, melyekre $\det A = 3$, $\det B = 6$, $\det C = 4$. Mennyi lesz az $A^3 B^{-1} C A^{-2}$ mátrix determinánsa?

17. Írjuk föl a $2x^4 - 2$ polinom gyöktényezős alakját \mathbb{C} fölött.

18. Egy valós együtthatós, normált, harmadfokú polinomnak gyöke az $1 + i$ és a konstans tagja 2. Mi a másik két gyöke?

19. Az $f(x) : (x^2 + 1)$ maradékos osztásnál a maradék $x + 1$. Határozzuk meg $f(i)$ értékét.

20. Hány nullosztó van \mathbb{Z}_4 -ben? Hát $\mathbb{Z}_4[x]$ -ben?

21. Adjunk meg egy olyan másodfokú $f \in \mathbb{Z}_6[x]$ polinomot, melyre $f(x)(3x + 1)$ foka 2.