Bsc algebra1 gyakorlat

Ötödik feladatsor (2010. okt. 17–28.)

1. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat az első sor, illetve az utolsó oszlop szerinti kifejtéssel, a felső háromszög alakra hozás módszerével, végül a 3×3-asokat a Sarrus-szabállyal is.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad \textbf{IHF:} \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$

3. Egy 2010×2010-es determináns minden sora számtani sorozat. Mennyi az értéke?

4. Egy determinánsban minden oszlopösszeg osztható héttel. Igazoljuk, hogy a determináns értéke is osztható héttel.

5. Egy 3×3-as determináns egyjegyű számokból áll. Minden sorban a három számjegyből alkotott háromjegyű szám héttel osztható. Igazoljuk, hogy a determináns osztható héttel.

6. Igazoljuk, hogy ha egy $n \times n$-es mátrixban van egy $m \times k$-as téglalap csupa nullákból, és $m + k > n$, akkor a mátrix determinánsa nulla.

7. Hány inverzió van az alábbi permutációkban, illetve a ‘hátulról előre’ permutációban?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{pmatrix}$$

8. Az $((a_{ij}))$ négyszer négyes mátrix determinánsának kiszámításakor mi lesz az alábbi tagok előjele: $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$, $a_{13}a_{34}a_{41}a_{22}$, $a_{22}a_{41}a_{34}a_{13}$?

9. Legyen M egy 3×3-as valós mátrix, melyre $M^T = -M$. Mutassuk meg, hogy a determinánsa nulla. A 3 helyett milyen n egészekre lesz biztosan igaz az analóg állítás?

10. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n-edrendű, komplex elemű determinánsban a_{ij} az a_{ji} konjugáltja minden i, j-re, akkor a determináns értéke valós.

11. Legyen M egész számokból álló négyzetes mátrix. Igazoljuk, hogy M^{-1} akkor és csak akkor áll csupa egész számból, ha $\det M \in \{1, -1\}$.

12. Invertáljuk Gauss-elimináció segítségével az alábbi mátrixokat. Ellenőrizzük szorzással a kapott eredményeket. Írjuk fel a harmadik és a negyedik mátrix inverzét a ferde kifejtési tételből kapott képlet segítségével is.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Oldjuk meg a Cramer-szabállyal az $x + y = 1$, $x + 2y = 2$ egyenletrendszert.

Permutációk, determinánsok

1. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

2. Melyek igazak az alábbiak közül:

a) Egy racionális elemű mátrix determinánsa mindig racionális szám.
b) Egy irracionális elemű mátrix determinánsa mindig irracionális szám.
c) Egy pozitív elemű mátrix determinánsa mindig pozitív szám.
d) Egy egész elemű mátrix determinánsa mindig egész szám.

3. Hány inverzió van az alábbi permutációkban (sorbarendezésként, illetve függvényként megadva őket)?

a) $1, 3, 2, 4$; b) $2, 3, 4, 1$; c) $n, n-1, n-2, \ldots, 1$; d) $2, 4, \ldots, 2n, 1, 3, 5, \ldots, 2n-1$;

e) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} x & y & u & v \\ y & v & u & x \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} \clubsuit & \sharp & \nabla & \infty \\ \infty & \nabla & \sharp & \clubsuit \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n & n+1 & \ldots & 2n \\ n+1 & \ldots & 2n & 1 & \ldots & n \end{pmatrix}$.

4. n elem sorbarendezésénél mi az inverziók számának lehetséges maximuma?

5. Mutassuk meg, hogy $n > 1$-re n elem páros és páratlan permutációinak a száma megegyezik.

6. Vizsgáljuk meg, szerepelhetnek-e az alábbi mátrix determinánsában a jelzett kifejtési tagok, és amelyek igen, azoknak határozzuk meg az előjelét is!

$$\begin{vmatrix} \text{E} & \text{N} & \text{I} & \text{A} \\ \text{B} & \text{Y} & \text{G} & \text{B} \\ \text{A} & \text{É} & \text{Ú} & \text{I} \\ \text{S} & \text{L} & \text{K} & \text{R} \end{vmatrix}$$

EGÉR, BÉKA, NYÚL, LIBA

7. Anélkül, hogy a determináns pontos értékét kiszámolnánk, bizonyítsuk be, hogy az alábbi „zenetörténeti” determináns értéke nem 0:

$$\begin{vmatrix} 1685 & 1732 & 1756 \\ 1770 & 1797 & 1810 \\ 1844 & 1860 & 1881 \end{vmatrix}.$$

(*Megjegyzés:* A determinánsban szereplő évszámok elsősorban születési évszámokként ismertek. Kik születtek az adott években?)

8. Tudva azt, hogy a $209865, 31671, 311117$ számok mindegyike osztható 17-tel, bizonyítsuk be, hogy az alábbi determináns is osztható 17-tel: $\begin{vmatrix} 20 & 98 & 65 \\ 3 & 16 & 71 \\ 31 & 11 & 17 \end{vmatrix}$.

9. Ha egy $M \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mátrix determinánsa 6, akkor mennyi $\det 2M$ értéke?

10. Hogyan változik egy $n \times n$-es mátrix determinánsa, ha tükrözzük a négyzet négy különböző szimmetriatengelyére? Hát ha elforgatjuk 90, 180, ill. 270 fokkal?

11. Számítsuk ki az alábbi $n \times n$-es determinánsokat:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \ldots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n+b_n \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \ldots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & n \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} a & b & b & \ldots & b \\ b & a & b & \ldots & b \\ b & b & a & \ldots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \ldots & a \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \ldots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \ldots & (n+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 & \ldots & (2n-1)^2 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{vmatrix}$.

12. Mi egy $n \times n$-es mátrix ($n \geq 3$) determinánsának az értéke, ha a mátrix minden sora számtani sorozat?

13. Tegyük föl, hogy A egy $n \times n$-es mátrix, és $\det A = 3$. Számoljuk ki az alábbi $2n \times 2n$-es determinánsokat:

a) $\begin{vmatrix} A & -A \\ 0 & A \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} A & -A \\ A & A \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} A & -A \\ -A & A \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 2A & 3A \\ A & 2A \end{vmatrix}$.

14. Tegyük föl, hogy $A = (a_{ij})$ olyan $(2n+1) \times (2n+1)$-es valós mátrix, melyre $a_{ij} = -a_{ji}$ teljesül minden $1 \leq i, j \leq 2n+1$-re. Mennyi az A mátrix determinánsa?

15. Tegyük föl, hogy $A = (a_{ij})$ olyan $n \times n$-es komplex mátrix, melyre $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$ teljesül minden $1 \leq i, j \leq n$-re. Mutassuk meg, hogy az A mátrix determinánsa valós.

ZH pénteken, 22-én 15.00-kor. Ülésrend: `http://www.cs.elte.hu/~agoston/bboard/ma10osz1/zh1taj.html`