Bsc algebra1 gyakorlat

Negyedik feladatsor (2010. okt. 11–15.)

1. Lineárisan függetlenek-e az alábbi mátrixok oszlop-, illetve sorvektorai? Mennyi ezeknek a mátrixoknak a sor-, illetve oszloprangja?

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&6\\2&0&5\\3&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\3&2&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&4&6\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$$

Mindegyik mátrixban adjunk meg rangnyi számú lineárisan független oszlopot az összes lehetséges módon.

2. Igazoljuk az alábbiakat.

(1) Ha egy vektorrendszerben szerepel a nullvektor, akkor az nem lehet független.
(2) $\{v\}$ akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$. Mikor lesz független $\{v, w\}$?
(3) Ha $\{v_1, v_2, v_3\}$ független, akkor $\{v_1 - 3v_2, v_2, v_3\}$ is független.

3. Határozzuk meg, mely $c \in \mathbb{R}$ paraméterértékekre lesz megoldható az alábbi mátrixegyenlet, s a legkisebb ilyen pozitív egész c-re adjuk is meg az összes megoldást.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&c\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}3&5\\5&7\\7&13\end{pmatrix}$$

4. Előáll-e a $\sqrt{3}$ az 1 és $\sqrt{2}$ számok racionális együtthatós lineáris kombinációjaként?

5. Tegyük föl, hogy létezik az AB mátrixszorzat. Mely állítások igazak az alábbiak közül?

(1) AB oszlopvektorai az A oszlopvektorainak lineáris kombinációi.
(2) AB oszlopvektorai a B oszlopvektorainak lineáris kombinációi.
(3) AB sorvektorai a B sorvektorainak lineáris kombinációi.
(4) AB sorvektorai a B oszlopvektorainak lineáris kombinációi.

6. Legyen $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ tetszőleges adott mátrix. Döntsük el, melyek igazak az alábbi állítások közül (a megfelelő magasságú nullvektort 0 jelöli):

(1) Ha az A oszlopai lineárisan összefüggnek, akkor az $Ax = 0$ egyenletrendszernek van a 0-tól különböző (azaz *nem triviális*) megoldása.
(2) Ha az A sorai lineárisan összefüggnek, akkor az $Ax = 0$ egyenletrendszernek van nem triviális megoldása.
(3) Ha az A oszlopai lineárisan összefüggnek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszernek egynél több megoldása van.
(4) Ha az A oszlopai lineárisan összefüggnek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszernek nem lehet egyértelmű a megoldása.

7. Tegyük föl, hogy az $Ax = b$ egyenletrendszernek az $x_1 = (1, 2, 3)^T$ és az $x_2 = (2, 3, 4)^T$ oszlopvektorok egyaránt megoldásai. Adjunk meg egy harmadik megoldást.

8. ***(IHF)*** Adjuk meg azoknak az $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixoknak az általános alakját, melyekre

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix} A = A^T \begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}$$

9. Mennyivel változhat meg egy mátrix rangja, ha egyetlen elemét megváltoztatjuk?