Bsc algebra1 gyakorlat

Második feladatsor (2010 szept. 20–24)

Trigonometrikus alak: $0 \neq z = a + bi = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, ahol $r = |z|$ és α a z *szöge*. Ezzel a z-vel való szorzás *forgatva nyújtás* α szöggel, r-szeresre. Trigonometrikus alakban **szorzásnál a hosszak szorzódnak, a szögek összeadódnak.** A *gyökvonás* képlete:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\Big) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1, \text{ itt } \sqrt[n]{r} \text{ pozitív valós}).$$

A $z^n = 1$ megoldásai az n-edik *egységgyökök:* $\sqrt[n]{1} = \varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$, ahol $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Az $\sqrt[n]{z}$ összes értékét úgy is megkaphatjuk, hogy az egyiküket végigszorozzuk az n-edik egységgyökökkel. Ezek az értékek szabályos n-szöget alkotnak.

1. ***(1.4.2, 1.4.8)*** Hozzuk trigonometrikus alakra: $1+i$, $1-i$, $\sqrt{3}+i$, $-1-\sqrt{3}i$, $\cos\alpha - i\sin\alpha$, $\cos(30°) - i\sin(60°)$, $\sin\alpha + i\cos\alpha$, $(1 + i\operatorname{tg}\alpha)/(1 - i\operatorname{tg}\alpha)$.

2. ***(1.5.14)*** Oldjuk meg az $x^3 = 2$ és az $x^4 = -9$ egyenleteket a komplex számok között. Adjuk meg az $x^8 = \sqrt{3} - i$, $x^n = -1$ egyenletek összes megoldását is.

3. ***(1.5.22)*** Számítsuk ki az n-edik egységgyökök összegét, szorzatát és négyzetösszegét.

4. ***(1.5.24)*** Fejezzük ki $\cos x$ és $\sin x$ segítségével $\sin 7x$-et.

5. ***(1.5.23*)*** Hozzuk „zárt alakra" a következő összeget:

$$\binom{1867}{0} + \binom{1867}{4} + \binom{1867}{8} + \binom{1867}{12} + \ldots.$$

6. ***(1.4.16*)*** Hozzuk zárt alakra a $\sin x + \sin(2x) + \ldots + \sin(nx)$ összeget.

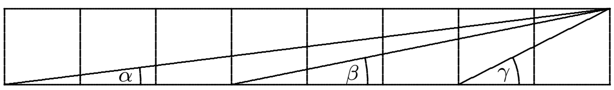
Nehezebb geometria-feladatok

7. ***(1.4.11)*** Legyenek z és w különböző komplex számok. Írjuk fel az őket összekötő szakasz felezőpontját, valamint annak a két szabályos háromszögnek a harmadik csúcsát, illetve a középpontját, melyeknek az adott két szám két csúcsa.

8. ***(1.4.12)*** Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk. Kössük össze az átellenes oldalakra rajzolt négyzetek középpontjait. Mutassuk meg, hogy az így kapott két szakasz merőleges és egyenlő hosszú.

9. ***(1.4.13)*** Írjunk egy háromszög mindegyik oldalára kifelé egy szabályos háromszöget. Igazoljuk, hogy ezek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak.

10. Részlet egy négyzetrácsból:



Igazoljuk, hogy $\alpha + \beta + \gamma = \pi/4$.

11. Milyen alakzatot alkotnak azok a z pontok, melyekre $(z-i)i/(z-1)$ negatív valós szám?

További gyakorló feladatok (lásd Ágoston István feladatsorát is)

12. Mennyi $\cos(-30°) - i\sin(-30)°$ szöge? Ha z szöge $40°$, akkor mennyi $2010/\bar{z}^{2010}$ szöge? Ha w abszolút értéke 1, szöge pedig $60°$, akkor mennyi $\bar{w}/w^2$?

13. Tegyük föl, hogy $(x + iy)^n = 3 + 2i$. Mennyi lesz ekkor $(x^2 + y^2)^n$?