Bsc algebra1 gyakorlat

Első feladatsor (2010 szept. 13–16)

A háromjegyű sorszámok a Kiss-könyvre utalnak, melyhez a megoldások ingyen letölthetők. Általános információk, feladatsorok: `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard`

Komplex számok. $z = a + bi$ $(a, b$ valós), ahol $i^2 = -1$. *Valós rész:* $\mathrm{Re}(z) = a$. *Képzetes rész:* $\mathrm{Im}(z) = b$ (és **nem** bi: a képzetes rsz is valós szám). *Konjugált:* $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$. *Abszolút érték:* $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$. *Osztás:* a törtet a nevező konjugáltjával bővítjük. *Azonosságok:* $z\overline{z} = a^2+b^2 = |z|^2$; $|\overline{z}| = |z|$; $\overline{z + w} = \overline{z}+\overline{w}$; $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ (összeg, szorzat, sőt különbség, hányados konjugáltja a konjugáltak összege, szorzata, különbsége, hányadosa); $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$. *Háromszög-egyenlőtlenség:* $|z + w| \le |z| + |w|$ (egyenlőség mikor áll?). *Binomiális tétel **(2.2.46)**:* $(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + b^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}a^{n-j}b^j$.

1. Alakítsuk szorzattá az $a^3 - b^3$, az $a^3 + b^3$ és az $x^2 - 8x + 15$ kifejezéseket.

2. ***(1.2.4)*** Adjuk meg az $u + v = 8$, $uv = 15$ egyenletrendszer **összes** valós megoldását. Tegyük meg ugyanezt az $u + v = 14$, $uv = 49$ egyenletrendszer esetében is.

3. Gyöktelenítsük az alábbi törtek nevezőjét:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}, \qquad \frac{1}{1-\sqrt[3]{2}}, \qquad \frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}, \qquad \frac{1}{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}.$$

4. Egyszerűsítsük: $\sqrt{8} \cdot \sqrt[4]{4}$; $\left(\sqrt[n-1]{x}\right)^{n^2-1}$; $(x^1)^2(x^2)^2 \cdots (x^n)^2$; $x^{1^2}x^{2^2} \cdots x^{n^2}$. Nehezebb kérdés: fel tudjuk-e írni az utolsó két képletben az x kitevőjét zárt alakban?

---

5. ***(1.3.11)*** Végezzük el az alábbi műveleteket: $(1 + i)(3 - 2i)$, $1/i$, $(1 + i)/(3 - 2i)$, $|\overline{(4 + i)}/(4 + i)|$, $|(1 + 1526i)^{100}/(1 - 1526i)^{100}|$, $(1 + i)^2$, $(1 + i)^{1241}$, $(-1 + i\sqrt{3})^3$.

6. Mutassuk meg, hogy ha az m és n egész számok előállnak két négyzetszám összegeként, akkor mn is előáll így.

7. Mivel egyenlő i^{2011} és $1 + i + \ldots + i^{2011}$?

8. ***(1.3.12)*** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok között. $x^2 + 1 = 0$, $x^2 = -12$, $x^2 + 2x + 2 = 0$, $x^2 + 2ix - 1 = 0$.

9. ***(1.3.13)*** Határozzuk meg azokat a $c + di$ számokat, melyek négyzete $20i - 21$. Oldjuk meg az $x^2 + (i - 2)x + (6 - 6i) = 0$ egyenletet.

10. ***(1.4.9)*** Rajzoljuk le a komplex síkon a következő halmazokat: $\{z : \mathrm{Re}(z + 2i) \le -2\}$, $\{z : \mathrm{Re}(z + 1) \ge \mathrm{Im}(z - 3i)\}$, $\{z : |z - i - 1| \le 3\}$, $\{z : |z - 3 + 2i| = |z + 4 - i|\}$, $\{z : z + \overline{z} = -1\}$, $\{z : 2z + 5 = 2\overline{z}\}$, $\{z : 1/z = \overline{z}\}$, $\{z : (1/z) + 8 = \overline{z}\}$, $\{z : |z| = iz\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}((z - 1)/(z + 1)) = 0\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}((z - 1)/(z + 1)) = 0\}$.

11. ***(IHF)*** Mutassuk meg komplex számok felhasználásával, hogy egy paralelogramma oldalai hosszának négyzetösszege ugyanaz, mint az átlói hosszának négyzetösszege (és fogalmazzuk is meg az ehhez tartozó azonosságot).

12. A sík (x, y) pontját $+90$ fokkal elforgatjuk az origó körül. Melyik pont lesz az eredmény? És ha $+60°$-kal forgatunk? És ha nem az origó körül, hanem az $(1, 2)$ pont körül forgatunk?

13. ***(1.4.10)*** A sík mely geometriai transzformációinak felelnek meg a komplex számok halmazának alábbi leképezései: $z \to 3z + 2$, $z \to (1 + i)z$.