Bsc algebra3 tanári szakirányú gyakorlat

Második zárthelyi (2009. május 15.) — eredmények

1. Az x^3+4x-1 polinomnak a racionális gyökteszt miatt csak ± 1 lehetne gyöke, de behelyettesítve egyik sem gyök (1 pont). Mivel a polinom harmadfokú, ezért irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, és így θ foka $\mathbb{Q}$ fölött 3 (1 pont). A $(\theta^3+1)(a+b\theta+c\theta^2)=1$ egyenletet a $\theta^3=1-4\theta$ felhasználásával redukálva $(2a-4c)+(-4a+2b+16c)\theta+(-4b+2c)\theta^2=1$ adódik (2 pont). A $2a-4c=1$, $-4a+2b+16c=0$, $-4b+2c=0$ egyenletrendszert megoldva a végeredmény $1/(\theta^3+1)=(17+2\theta+4\theta^2)/18$ (2 pont).

2. Ha $x=\sqrt{\sqrt{10}-1}+1=\alpha$, akkor $0=\big((x-1)^2+1\big)^2-10=x^4-4x^3+8x^2-8x-6$ (2 pont), ami irreducibilis a Schönemann–Eisenstein miatt $\mathbb{Q}$ fölött, ezért α foka $\mathbb{Q}$ fölött 4, és a minimálpolinom a fenti (1 pont). Mivel α gyöke a $g(x)=(x-1)^2-(\sqrt{10}-1)$ másodfokú polinomnak, ezért foka $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$ fölött legfeljebb 2 (1 pont). A $\mathbb{Q}\le\mathbb{Q}(\sqrt{10})\le\mathbb{Q}(\alpha)$ testláncból a szorzástétel miatt α foka $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$ fölött pontosan 2, hiszen $|\mathbb{Q}(\sqrt{10}):\mathbb{Q}|=2$ (1 pont). Ezért a $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$ fölötti minimálpolinomja másodfokú, és osztója $g(x)$-nek. Tehát a minimálpolinom $g(x)$ (1 pont).

3. Mivel a $\sqrt[7]{7}$ foka $\mathbb{Q}$ fölött 7, az $\sqrt[5]{5}$ foka $\mathbb{Q}$ fölött 5, és a 7 relatív prím az 5-höz, ezért a $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{5},\sqrt[7]{7})\ge\mathbb{Q}$ bővítés foka 35 (1 pont), és így $\sqrt[5]{5}$ foka $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{7})$ fölött 5 (1 pont). Tehát ennek a bővítésnek minden eleme első vagy ötödfokú $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{7})$ fölött, az elsőfokúak az $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{7})$ elemei (1 pont). Ezért a feladatban szereplő két számról csak azt kell megmutatni, hogy nem elemei $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{7})$-nek, mert akkor mindkettő foka 5 lesz (1 pont). Ez azért igaz, mert a bővítés elemei **egyértelműen** írhatók $a+b\sqrt[5]{5}+c\sqrt[5]{5^2}+d\sqrt[5]{5^3}+e\sqrt[5]{5^4}$ alakban, ahol $a,b,c,d,e\in\mathbb{Q}(\sqrt[7]{7})$ (2 pont). *Megjegyzés:* aki a fenti indoklás vége helyett azt igazolta, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{7})(1+\sqrt[5]{5})=\mathbb{Q}(\sqrt[7]{7})(\sqrt[5]{5})$, és ebből vezette le, hogy $1+\sqrt[5]{5}$ foka 5, az $\sqrt[5]{125}+\sqrt[5]{25}$ számmal pedig nem foglalkozott, az összesen 3 pontot kaphat.

4. Az x^2-2 polinomnak nincs gyöke $\mathbb{Z}_3$-ban, és mivel másodfokú, ezért irreducibilis $\mathbb{Z}_3$ fölött (1 pont). Így $K\ge\mathbb{Z}_3$ másodfokú bővítés, és ezért elemszáma $3^2=9$ (1 pont). Az $\alpha+1$ gyöke az $(x-1)^2-2$ másodfokú polinomnak (1 pont). Ez is irreducibilis (hiszen x^2-2 eltoltja), ezért ez lesz $\alpha+1$ minimálpolinomja (1 pont). A $K^\times$ csoport nyolcelemű, tehát $\alpha+1$ rendje 1, 2, 4 vagy 8 lehet. De $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$, ennek nem osztója $\alpha+1$ minimálpolinomja (ami x^2+2x-1). Ezért $(\alpha+1)^4\ne 1$, tehát $\alpha+1$ rendje 8 (2 pont). *Megjegyzés:* a két negyedrendű elem nyilván $\pm\alpha$, hiszen $\alpha^2=-1$. Az $\alpha+1$ közvetlen hatványozásával is belátható, hogy rendje 8: négyzete 2α, negyedik hatványa -1.

5. Egy szabályos 1200-szög középponti szöge $360/1200=3/10$ fokos. Ha tehát szerkeszthető lenne 3/10 fokos szög, akkor szabályos 1200-szög is szerkeszthető lenne (3 pont). Ez nem igaz, mert 1200 kanonikus alakjában az 5 prím kitevője 2 (3 pont).

6. Legyen $x=a+bi+cj+dk$, ahol $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Ekkor $x^2=a^2-b^2-c^2-d^2+2abi+2acj+2adk$. Az $x^2+2x+j+1=0$ egyenletbe visszahelyettesítve a valós rész, valamint i, j, és k együtthatója is nulla. Így $a^2-b^2-c^2-d^2+2a+1=0$, $2ab+2b=0$, $2ac+2c=-1$, $2ad+2d=0$ (3 pont). Mivel $2c(a+1)=-1$, ezért $a+1\ne 0$, és így $b=d=0$ (1 pont). Az első egyenletből $a+1=\pm c$, tehát $2c^2=\pm 1$ (1 pont). Mivel $c^2\ge 0$, két megoldás van: $x=(\sqrt{2}-2-\sqrt{2}j)/2$, illetve $x=(-\sqrt{2}-2+\sqrt{2}j)/2$ (1 pont). *Második megoldás:* Az $(x+1)^2=-j$ egyenletet kell megoldani. Ha $\alpha^2=-j$, akkor $N(\alpha)=1$, és így $\alpha=-j\overline{\alpha}$. Ezért α-ban és így $x=\alpha-1$-ben sem szerepel i-s és k-s tag. Az $a+cj$ alakú számok teste $\mathbb{C}$-vel izomorf, ezért a $-j$ számból trigonometrikus alak segítségével is vonhatunk négyzetgyököt.