Bsc algebra3 tanári szakirányú gyakorlat

Első zárthelyi (2009. március 27.) — eredmények

1. A 7 által generált részcsoport $N = \{7, 9, 23, 1\}$ (1 pont), és mivel G elemszáma $\varphi(40) = 16$, ezért G/N négyelemű csoport. Az N szerinti másik három mellékosztály $\{3, 21, 27, 29\}$, $\{11, 37, 19, 13\}$ és $\{17, 39, 33, 31\}$ (3 pont). Ezekből egy-egy elemet kivéve és ezeket négyzetre emelve $3^2 = 9 \in N$, $11^2 = 1 \in N$ és $17^2 = 9 \in N$ (1 pont). Ezért a G/N faktorcsoportban nincs negyedrendű elem, tehát nem ciklikus (1 pont). *Második megoldás:* Ha $g \in G$, akkor g páratlan, ezért $g^2 \equiv 1$ (8). Továbbá $g^2 \equiv 1, 4$ (5). Ezért a kínai maradéktétel miatt g^2 csak kétféle maradékot adhat 40-nel osztva, ezek 1 és $3^2 = 9$. De $9 \in N$, ezért G/N-ben minden elem négyzete az egységelem. Mivel ez a faktorcsoport négyelemű, nem lehet ciklikus. A második megoldást elegánsabban is elmondhatjuk annak felhasználásával, hogy $\mathbb{Z}_{40}^\times \cong \mathbb{Z}_8^\times \times \mathbb{Z}_5^\times$.

2. Ha $I = (49x^7, 7x^{49})$ főideál lenne, akkor csak $49x^7$ és $7x^{49}$ kitüntetett közös osztója, azaz $7x^7$ generálhatná (1 pont). Ezért $7x^7 = 49x^7p(x) + 7x^{49}q(x)$ teljesülne alkalmas $p, q \in \mathbb{Z}[x]$-re. Innen $x = 7$ helyettesítéssel $7^9 \mid 7^8$ adódna, ami ellentmondás (2 pont). A faktorgyűrű nem nullosztómentes, mert $7x^7 \notin I$ miatt $7x^7 + I$ nem nulla elem a faktorban (1 pont), melynek négyzete nulla, mert $(7x^7)^2 = 49x^{14} \in I$ (2 pont).

3. Mivel az $x^2 + 1$-gyel való osztási maradékok az $ax + b$ alakú polinomok, ahol $a, b \in \mathbb{Z}_3$, az R/I elemeit ezek reprezentálják, és így a faktorgyűrű elemszáma $3^2 = 9$ (2 pont). Mivel $ax^2 + I = -a + I$, ezért $(x + 1 + I)(ax + b + I) = ax^2 + ax + bx + b + I = (a + b)x + (b - a) + I$ (2 pont). Ez akkor lesz az egységelem, azaz $1 + I$, ha $a + b = 0$ és $b - a = 1$, vagyis a keresett inverz $x + 2 + I$ (2 pont).

4. A $9i - 46$ normája $2197 < 4096$. Ennek köbszámnak kellene lennie, az alap nyilván 10 és 16 közötti, és nem osztható a 2, 3, 5 egyikével sem, ezért csak 13 lehet. Köbre emeléssel meggyőződhetünk róla, hogy $13^3 = 2197$. Ezért $9i - 46$ csak 13 normájú szám köbe lehet (1 pont). Az $a^2 + b^2 = 13$ egyenletet megoldva (vagy a Gauss-prímek leírását használva) ez a 13 normájú szám a $2 + 3i$ vagy a $2 - 3i$ egységszerese. Mivel $(2 + 3i)^3 = 9i - 46$, ez köbszám (2 pont). A $205 - 164i = 41(5 - 4i)$ osztható $41 = (5 + 4i)(5 - 4i)$-vel, és $5 + 4i$ és $5 - 4i$ nem egymás egységszeresei. Ezért $205 - 164i$ kanonikus alakjában a kitevők nem oszthatók hárommal, és így ez a szám nem egy Gauss-prím köbe (3 pont).

5. Ha az állítás teljesül egy Gauss-prímre, akkor az egységszereseire is (1 pont). A $4k + 3$ alakú pozitív prímek megfelelnek, mert ha p ilyen és $p \mid a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$, akkor $p \mid a + bi$ vagy $p \mid a - bi$, azaz $p \mid a$ és $p \mid b$ (1 pont). Megfelelő az $1 + i$ is, mert ha $1 + i \mid a^2 + b^2 = n \in \mathbb{Z}$, akkor $2 = N(1 + i) \mid N(n) = n^2$, azaz n^2 páros, de akkor n is páros, ezért $(1 + i)^2 = 2i \mid n$ (2 pont). Végül ha $\pi = a + bi$ olyan Gauss-prím, amelyre $N(\pi) = a^2 + b^2$ egy $4k + 1$ alakú prím $\mathbb{Z}$-ben, akkor erre az a-ra és b-re nem teljesül a feltétel, hiszen $\pi^2 \mid a^2 + b^2 = \pi\overline{\pi}$-ból $\pi \mid \overline{\pi}$ következne (2 pont).

6. Az x^2 (nem egység és) nem prímtulajdonságú, mert $x^2 \mid (x^3)(x^3)$, de x^2 nem osztója x^3-nek, hiszen $x^3/x^2 = x \notin R$ (2 pont, felhasználtuk az $\mathbb{R}[x]$-beli maradékos osztás egyértelműségét). Az x^2 felbonthatatlan R-ben, mert minden nála alacsonyabb fokú polinom konstans (2 pont). Ezért R nem lehet főideálgyűrű, mert akkor alaptételes lenne, és egy alaptételes gyűrűben minden felbonthatatlan elem prím (2 pont). *Második megoldás:* Álljon I azokból az R-beli polinomokból, melyek konstans tagja nulla. Ez ideál, de nem főideál, mert az x^2 és x^3 (felbonthatatlan) elemeinek kitüntetett közös osztója 1, ami nincs benne I-ben.