Bsc algebra3 tanári szakirányú gyakorlat
Első zárthelyi (2009. március 27)

Mind a hat feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. A feladatok sorrendje tematikus, nem nehézségi. Minden feladat megoldását **külön lapra** írjátok. Használni csak egy lapnyi, kézzel írott puskát lehet, kalkulátort, mobiltelefont sem. Minden lapon szerepeljen a szerző neve, és legalább egy lapon az ELTE-azonosítója, illetve gyakorlatvezető neve, **OLVASHATÓ NYOMTATOTT NAGYBETŰKKEL**.

1. *Legyen N a $G = \mathbb{Z}_{40}^{\times}$ csoportban a 7 által generált részcsoport. Ciklikus-e G/N?*

2. *A $\mathbb{Z}[x]$ gyűrűben döntsük el, hogy $(49x^7, 7x^{49})$ főideál-e (3 pont), és hogy a szerinte vett faktorgyűrű nullosztómentes-e (3 pont).*

3. *Legyen $I = (x^2 + 1)$ az $R = \mathbb{Z}_3[x]$ gyűrű főideálja. Adjuk meg az R/I faktorgyűrű elemszámát (2 pont), valamint R/I-ben az $x + 1 + I$ elem inverzét a szorzásra nézve $ax + b + I$ alakban, ahol $a, b \in \mathbb{Z}_3$ (4 pont).*

4. *Köbszám-e a Gauss-egészek gyűrűjében $9i - 46$ (3 pont), illetve $205 - 164i$ (3 pont)?*

5. *Mely π Gauss-prímekre teljesül, hogy tetszőleges $a, b \in \mathbb{Z}$ számokra $\pi \mid a^2 + b^2$ esetén $\pi^2 \mid a^2 + b^2$ is fennáll?*

6. *Álljon az $R \subseteq \mathbb{R}[x]$ részgyűrű azokból a polinomokból, melyekben az x-es tag együtthatója nulla. (Azt nem kell igazolni, hogy R tényleg részgyűrű.) Döntsük el, hogy prímtulajdonságú-e az x^2 elem R-ben (2 pont), és hogy R főideálgyűrű-e (4 pont).*