Bsc algebra3 keresztféléves tanári gyakorlat

Hetedik feladatsor (2009. május 11-14.)

$\mathbb{K}$ jelöli a kvaterniók ferdetestét.

5.11.12. *Határozzuk meg az $i+j$ és $i+j+k$ kvaterniók négyzetét, inverzét és minimálpolinomját.*

5.11.4, 5.11.5. *Mik az x^2-1 és x^2+1 polinomok gyökei $\mathbb{K}$-ban?*

5.11.1. *Legyen $z = p+qi+rj+sk = \alpha+\beta j$, ahol $\alpha = p+qj$ és $\beta = r+sj$. Mutassuk meg, hogy a*

$$\varphi(z) = \varphi(p+qi+rj+sk) = \begin{bmatrix} p+qi & r+si \\ -r+si & p-qi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix}$$

leképezés injektív gyűrűhomomorfizmus a $\mathbb{K}$-ból a $\mathbb{C}^{2\times 2}$ gyűrűbe, és így a kvaterniók gyűrűt alkotnak a megadott műveletekre.

5.11.3. *Igazoljuk a $z\overline{z} = p^2+q^2+r^2+s^2$ összefüggést, továbbá azt, hogy $z, w \in \mathbb{K}$ esetén $\overline{z \cdot w} = \overline{w} \cdot \overline{z}$, és ebből hogy $N(zw) = N(z)N(w)$. Vezessük le ebből, hogy ha két egész szám mindegyike előáll négy négyzetszám összegeként, akkor a szorzatuk is. Mutassuk meg, hogy $N(z)$ csak akkor nulla, ha $z = 0$. A komplex számok analógiájára adjunk képletet egy kvaternió inverzére, és igazoljuk, hogy a kvaterniók ferdetestet alkotnak.*

5.11.13*. *Igazoljuk, hogy a $p_1+q_1i+r_1j+s_1k$ és a $p_2+q_2i+r_2j+s_2k$ nem valós kvaterniók pontosan akkor generálják $\mathbb{K}$-nak ugyanazt a ($\mathbb{C}$-vel izomorf) részalgebráját, ha a (q_1, r_1, s_1) és a (q_2, r_2, s_2) vektorok párhuzamosak.*

5.11.14*. *Igazoljuk, hogy minden nem valós kvaterniónak pontosan két négyzetgyöke van $\mathbb{K}$-ban.*

5.11.15*. *Oldjuk meg $\mathbb{K}$-ban az $x^n = 1$ egyenletet.*

Gyakorló vizsgakérdések

5.11.11. *Mutassuk meg, hogy a Frobenius-tétel mindegyik feltétele szükséges, vagyis adjunk példát olyan algebrára, amely nem a tételben felsoroltak valamelyike, de*

a) *$\mathbb{R}$ fölötti, nullosztómentes (csak nem véges dimenziós);*
b) *$\mathbb{R}$ fölötti, véges dimenziós (csak nem nullosztómentes).*
c) *Nullosztómentes, n-dimenziós, ahol n tetszőleges, előre megadott pozitív egész (csak nem $\mathbb{R}$ fölötti).*

5.10.13. *Tegyük föl, hogy egy racionális együtthatós polinomnak az $1+\sqrt{2}$ szám gyöke. Mutassuk meg, hogy akkor az $1-\sqrt{2}$ is gyöke.*

5.10.14. *Tegyük föl, hogy egy racionális együtthatós polinomnak az $1+\sqrt[3]{2}$ szám gyöke. Mutassuk meg, hogy akkor a polinom legalább harmadfokú. Meg tudunk adni két másik (komplex) gyököt?*