

### Bsc algebra3 keresztféléves tanári gyakorlat

Hatodik feladatsor (2009. április 23 – május 4.)

**6.7.4.** Igazoljuk, hogy a négyelemű test mindegyik eleme gyöke az  $x^4 - x$  polinomnak.

**384–386. oldal.** Legyen  $L = \mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$  a nyolcelemű test.

- Mutassuk meg, hogy  $L$  minden eleme gyöke az  $x^8 - x$  polinomnak, majd bontsuk ezt irreducibilisek szorzatára  $\mathbb{Z}_2$  fölött.
- Határozzuk meg a  $\psi(x) = x^2$  Frobenius-automorfizmus ciklusait az  $L$  halmazon. Igazoljuk, hogy az egy ciklushoz tartozó elemek minimálpolinomja és rendje egyenlő.
- Határozzuk meg  $L$  mindegyik elemének a minimálpolinomját a prímtest fölött.
- Határozzuk meg  $L$  összes résztestét.

Végezzük el az analóg vizsgálatokat a 4, 9, 16 elemű test esetében is.

**6.7.16.** Hány négyzet-, illetve köbelem van az 27 elemű testben? Hány gyöke van itt az  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ , illetve az  $x^2 - x + 1$  polinomnak?

**6.7.17.** Mi a 17 elemű test fölött az  $x^2 + 1$  és az  $x^2 - 3$  polinomok felbontási teste?

**6.7.18.** Határozzuk meg  $x^2 + x + 1$  felbontási testét a 121, illetve a 125 elemű test fölött.

**6.7.19.** Határozzuk meg az  $x^{11} - 1$  polinom felbontási testét  $\mathbb{Z}_2$  és  $\mathbb{Z}_{11}$  fölött.

**6.7.23.** Hány 8, illetve 12 fokú irreducibilis polinom van  $\mathbb{Z}_2$  fölött?

**6.8.19.** Az alábbi feladatokban adjuk meg a  $K$  alaptestet, a  $K(\alpha)$  fokát  $K$  felett, az  $\alpha$  minimálpolinomja felbontási testének fokát  $K$  felett, és döntsük el, hogy a szerkesztés elvégezhető-e.

- Adott az egységsszakasz, szerkesztendő  $\alpha = \sqrt[5]{2}$ .
- Adott az egységsszakasz, szerkesztendő  $\alpha = \sqrt[4]{2}$ .
- Adott az egységsszakasz és egy  $\sqrt[3]{2}$  hosszú szakasz, szerkesztendő  $\alpha = \sqrt[6]{2}$ .
- Adott az egységsszakasz és egy  $\sqrt[3]{2}$  hosszú szakasz, szerkesztendő  $\alpha = \sqrt[5]{2}$ .
- Adott  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, \pi)$ , a feladat az egységsugarú kör négyszögesítése.
- Adott egy szabályos 9-szög a síkon. Szerkesztendő egy szabályos 18-szög. Mi az  $\alpha$ ?

**6.8.20.** Hol a hiba a következő gondolatmenetben? Az egységsszakaszból akarunk  $\pi$  hosszú szakaszt szerkeszteni. Vegyük fel a koordinátarendszert úgy, hogy a síkon adott egységsszakasz két végpontja a  $(0, \pi)$  és az  $(1, \pi)$  pontokba kerüljön. Ekkor  $K = \mathbb{Q}(0, 1, \pi)$ , amelynek a szerkesztendő szám eleme. Tehát ez a szerkesztés elvégezhető.

**6.8.21.** Szerkeszthető-e a háromszög két oldalából és az egyikhez tartozó szögfelezőből?

**8.8.22.** Szerkeszthető-e az egyenlő szárú háromszög a szárából és a beírt kör sugarából?

**8.8.23.** Mely  $n$  egészekre szerkeszthető  $n$  fokos szög?

**8.8.24.** Határozzuk meg  $\cos(2\pi/n)$  fokát  $\mathbb{Q}$  fölött.

**6.10.10\*.** Igazoljuk, hogy ha  $x^4 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{Q}[x]$  irreducibilis  $\mathbb{Q}$  felett, akkor ekvivalensek:

- Az egyenlet valamelyik gyöke szerkeszthető az egységsszakaszból kiindulva.
- Az egyenlet összes gyöke szerkeszthető az egységsszakaszból kiindulva.
- A  $8x^3 - 4ax^2 - 8cx + (4ac - b^2)$  polinomnak van racionális gyöke.