Bsc algebra3 keresztféléves tanári gyakorlat

Ötödik feladatsor (2009. április 2–20)

2.2.35. *Igazoljuk, hogy az* $a+b\sqrt{2}$ $(a,b\in\mathbb{Q})$ *alakú számok résztestet alkotnak* $\mathbb{C}$*-ben.*

6.1.24. *Igaz-e, hogy* $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$*?*

6.1.2. *Hozzuk két* $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ *alakú szám szorzatát is ugyanilyen alakra* $(a,b,c\in\mathbb{Q})$.

6.1.3. *Írjuk fel az* $1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ *és a* $2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ *szám reciprokát* $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ *alakban, ahol* $a,b,c\in\mathbb{Q}$.

6.1.15. *Legyen* θ *az* x^3+3x+1 *polinom (egyetlen) valós gyöke. Írjuk fel a* $\theta^5+2\theta^3$ *és a* $\theta/(\theta-3)$ *számokat* $a+b\theta+c\theta^2$ *alakban, ahol* $a,b,c\in\mathbb{Q}$*. Mi* θ *minimálpolinomja* $\mathbb{Q}$ *fölött?*

5.10.15. *Határozzuk meg az alábbi számok minimálpolinomját a racionális test fölött:* π, $1+i$, $\sqrt{2}+i$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $1+\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$, $\cos 20°$, *egy primitív* n*-edik egységgyök, ahol* $n=2,3,4,5,6$*, illetve tetszőleges prímszám.*

6.1.7, 6.1.25. *Igazoljuk az alábbiakat:* $\mathbb{Q}(\sqrt{6})\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{2}+1)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{2})=\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

6.2.14. *Felírható-e* $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ *alakban a* $\sqrt[6]{2}$ *illetve a* $\sqrt{2}$*, ahol* a,b,c *racionális számok?*

6.2.15. *Számítsuk ki az alábbi fokszámokat:* $\sqrt[4]{2}$ *foka* $\mathbb{Q}$ *és* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *fölött;* $|\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbb{Q}|$; $|\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}|$; $|\mathbb{Q}(\sqrt{2}\sqrt[3]{3}):\mathbb{Q}|$; $\sqrt[4]{2}$ *foka* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ *fölött;* $\sqrt[4]{2}$ *foka* $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ *fölött;* i *foka* $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ *fölött;* $\sqrt[4]{2}$ *foka* $\mathbb{Q}(i)$ *fölött;* $\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}$ *foka* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *fölött;* $\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}$ *foka* $\mathbb{Q}$ *fölött;* $\sqrt{\pi}$ *foka* $\mathbb{Q}(\pi)$ *fölött.*

6.2.17. *Igazoljuk, hogy ha* a *és* b *valós, akkor* $a+bi$ *pontosan akkor algebrai (*$\mathbb{Q}$ *fölött), ha* a *is és* b *is az.*

6.2.18. *Az alábbi számok közül melyek algebraiak, és melyek transzcendensek:* $\pi+3$, $5\pi+6$, $\pi+\sqrt{2}$, $\pi^2+2\pi+2$, $\sqrt{\pi}$.

6.2.19. *Egy algebrai szám és egy transzcendens szám összege mikor algebrai? És a szorzatuk? Egy algebrai szám négyzete lehet-e transzcendens? És a négyzetgyöke?*

6.2.1. *Tegyük föl, hogy* V *vektortér* $\mathbb{C}$ *fölött. Mutassuk meg, hogy ha* $b_1,\dots,b_n$ *bázisa, akkor* V *vektortér* $\mathbb{R}$ *fölött is ugyanazokra a műveletekre, és* $b_1,\dots,b_n,ib_1,\dots,ib_n$ *bázis lesz* $\mathbb{R}$ *fölött. Vagyis az* $\mathbb{R}$ *fölötti dimenzió a* $\mathbb{C}$ *fölötti dimenziónak a kétszerese.*

6.1.23. *Független-e* $\{1,i,\sqrt{2}+3i\}$ $\mathbb{Q}$ *fölött;* $\{1,i,\sqrt{2}+3i\}$ $\mathbb{R}$ *fölött;* $\{1,\pi,1/\pi\}$ $\mathbb{Q}$ *fölött?*

6.2.11. *Mutassuk meg, hogy ha* $K\le L$ *egy testbővítés,* $\alpha,\beta\in L$*, és* $\mathrm{gr}_K(\alpha)$ *és* $\mathrm{gr}_K(\beta)$ *relatív prímek, akkor* $|K(\alpha,\beta):K|=\mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_K(\beta)$.

6.2.6. *Legyen* $K\le L$ *testbővítés, és tegyük föl, hogy az* $\alpha\in L$ *elem gyöke egy* n*-edfokú,* $K[x]$*-beli polinomnak. Igazoljuk, hogy* $\mathrm{gr}_K(\alpha)\le n$*. Fennáll-e itt a* $\le$ *helyett oszthatóság?*

6.2.9. *Legyen* θ *nem valós gyöke az* x^3-2 *polinomnak. Határozzuk meg* θ *fokát* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ *fölött, és a* $\mathbb{Q}(\theta)\cap\mathbb{R}$ *testet. Igaz-e, hogy ha* $K\le L\le M$*, és* $\alpha\in M$*, akkor* $\mathrm{gr}_L(\alpha)\mid\mathrm{gr}_K(\alpha)$*?*

6.2.20, 2.5.18. *Igazoljuk, hogy* $\mathbb{Q}$ *egyetlen véges bővítése sem algebrailag zárt. Mutassuk meg, hogy a* $\mathbb{Z}_p$ *test nem algebrailag zárt. Melyek az algebrailag zárt véges testek?*