Bsc algebra3 keresztféléves tanári gyakorlat

Negyedik feladatsor (2009. március 19–30)

1. *Adjuk meg 50, 25 és 65 összes felbontását két négyzetszám összegére. Hasonlítsuk össze a felbontások számát a képletből nyert eredménnyel.*

2. *A Gauss-egészek G gyűrűjében álljon I_m azokból a Gauss-egészekből, amelyek valós és képzetes része is osztható m-mel. Igazoljuk, hogy I_m főideál. Hány elemű G/I_3, illetve G/I_5? Melyik alkot testet? Melyikben vannak nullosztók, mik azok?*

3. *Hány olyan I ideál van $\mathbb{R}[x]$-ben, amelynek eleme π, x, illetve $x^2 - 1$?*

4. *Legyen H az $\alpha = a + bi\sqrt{5}$ alakú számok gyűrűje, ahol a, b egész.*
- a) *Definiáljuk a normát.*
- b) *Mik az egységek?*
- c) *Nem igaz a számelmélet alaptétele: lássuk be, hogy a $6 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5}) = 2 \cdot 3$ felbontásban mind a négy tényező felbonthatatlan, és nem egységszeresek.*
- d) *Mutassuk meg, hogy a $(2, 1 + i\sqrt{5})$ ideál nem főideál.*

5. *Tekintsük a 10-hez relatív prím nevezőjű törtek, illetve a véges tizedestörtek gyűrűjét.*
- a) *Mik az egységek ezekben a gyűrűkben?*
- b) *Határozzuk meg az összes felbonthatatlant. Hány páronként nem egységszeres van közöttük?*
- c) *Hol bukik meg itt az euklideszi bizonyítás a végtelen sok prímszám létezésére?*
- d) *Igaz-e a számelmélet alaptétele? Euklideszi-e ezek e gyűrűk?*

6. *Mutassuk meg, hogy a páros számoknál tapasztalt számelméleti „anomáliák” zöme az egységelem hiányából ered: ha egy kommutatív, nullosztómentes gyűrűben nincs egységelem, akkor nincs benne sem egység, sem pedig prím.*

---

7. *Igazoljuk, hogy 1010 semmilyen alapú számrendszerben sem teljes hatvány.*

8. *Bizonyítsuk be, hogy „110” és „1320” semmilyen alapú számrendszerben sem teljes hatvány, „111” pedig nem négyzetszám.*

9. *Oldjuk meg az alábbi öt diofantikus egyenletet: $2xy+3x+5y = 7$; $x^2+y^2-33z^2 = 55$; $(x^2 - 5)(x^2 + 4) = z^3$; $x^2 - 13y^2 = 14z^2$; $x^{12} + 13y^{24} = 5z^{36}$.*

10. *Beosztható-e 6 szomszédos egész szám két (diszjunkt) csoportba úgy, hogy az egyik csoport elemeinek a szorzata megegyezzék a másik csoport elemeinek a szorzatával?*

11. *Hányszor fordul elő, hogy egy négyzetszám (a) 1-gyel nagyobb; (b) 2-vel nagyobb; (c) 1-gyel kisebb; (d) 11-gyel kisebb egy másik négyzetszám ötszörösénél?*

12. *Milyen n-re oldható meg a $4x^2 + y^2 = n$ diofantikus egyenlet?*

13. *Hányszor fordul elő, hogy három relatív prím négyzetszám számtani sorozatot alkot?*

14. *Hányszor fordul elő, hogy két pozitív (a) valós; (b) racionális szám szorzata az összegük reciproka?*

15. *Lássuk be, hogy minden pozitív páratlan prímszám egyértelműen áll elő két különböző pozitív egész harmonikus közepeként.*