Bsc algebra3 keresztféléves tanári gyakorlat

Harmadik feladatsor (2009. március 5–16)

Az alábbi feladatokban $\alpha = a + bi$, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. *Az alábbi gyűrűk közül melyeknek van $\mathbb{Z}_3$-mal izomorf résztestе:* $\mathbb{Z}_3[x]$, $\mathbb{Z}_{15}$, $\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}$.

2. *Határozzuk meg $\mathbb{Z}$-ben az $(1001, 770, 182)$ ideál összes generátorelemét.*

3. *Ha $a, b \in \mathbb{Z}$, akkor mi lesz $\mathbb{Z}$-ben $(a) + (b)$, illetve $(a) \cap (b)$ generátoreleme?*

4. *Határozzuk meg $\mathbb{Q}[x]$-ben az alábbi ideálok generátorait:* $(x^{20}-1,\ x^3-3x+2)$, *valamint* $(x^{100}+100x^3+2,\ x^{200}+100x^7+6)$. *Hány ideálja van a $\mathbb{Q}[x]/(x^4-1)$ faktorgyűrűnek?*

5. *Melyek főidálok $\mathbb{Z}[x]$-ben az alábbiak közül:* $(3, x^2)$, $(3x, x^2)$, $(3x, 2x^2)$, $(3x^2, 2x^2)$.

6. *Melyik ismert gyűrűvel izomorf $\mathbb{Z}[x]/(2, x)$?*

7. *Álljon $R = \mathbb{Z}[x]$-ben I azokból a polinomokból, amelyekben a konstans tag és az elsőfokú tag együtthatója is osztható 13-mal. Lássuk be, hogy I ideál, de nem főideál. Hány elemű R/I? Mely elemeknek van R/I-ben inverze, és mik a nullosztók?*

8. *Hány elemű $\mathbb{Z}[x]/(2, x^2+x+1)$? Test-e?*

9. *Legyenek I, J ideálok az R gyűrűben. Igaz-e, hogy $I \cap J = 0 \implies I = 0$ vagy $J = 0$? És ha $R = \mathbb{Z}$? És ha R nullosztómentes?*

10. *Az alábbi állításokról vizsgáljuk meg, igazak-e a Gauss-egészek gyűrűjében.*
a) $2 + 3i \mid 7i - 4$.
b) $3 + 4i$ *és* $4 - 3i$ *egymás egységszeresei.*

11. *Hogyan olvasható le a és b, illetve $N(\alpha)$ alapján, hogy $1 - i \mid \alpha$?*

12. *Az* $1+i$, $2+i$, $3+4i$, 2, 3, 5 *számok közül melyek felbonthatatlanok $\mathbb{G}$-ben?*

13. *Igazoljuk háromféleképpen is, hogy α Gauss-prím $\iff$ $\overline{\alpha}$ Gauss-prím.*

14. *Bontsuk fel a* 14, 20, 30, $90 - 1230i$ *számokat $\mathbb{G}$-ben az alaptétel szerint.*

15. *Teljes hatodik hatvány-e $\mathbb{G}$-ben a -27? És a -8?*

16. *Melyek igazak az alábbiak, illetve a megfordításaik közül?*
a) $\big(N(\alpha), N(\beta)\big) = 1 \implies \big(\alpha, \beta\big) = 1$.
b) $\big(\alpha, \overline{\alpha}\big) = 1 \implies \big(a, b\big) = 1$.
c) α *„köbszám”* $\implies N(\alpha)$ *köbszám.*

17. *Mennyi az $1234567 + 891011i$ Gauss-egész összes osztójának az összege?*

18. *Melyek igazak?*
a) $73 \mid a^2 + b^2 \implies 73^2 \mid a^2 + b^2$.
b) $77 \mid a^2 + b^2 \implies 77^2 \mid a^2 + b^2$.

19. *Mely Gauss-egészek oszthatók a konjugáltjukkal?*

20. *Határozzuk meg a $2 + 11i$ és $13 + 4i$ összes kitüntetett közös osztóját a Gauss-egészek között az euklideszi algoritmussal, és ezek egyikét állítsuk elő az algoritmus alapján $ax + by$ alakban, ahol $x, y \in \mathbb{G}$.*