Bsc algebra3 keresztféléves tanári gyakorlat
Második feladatsor (2009. február 19 – március 2)

5.1.24. *Igazoljuk, hogy a* $\mathbb{Z}$ *és* $\mathbb{Z}_n$ *gyűrűkben minden részcsoport részgyűrű, sőt ideál.*

5.1.25. *Adjunk példát egy-egy olyan részgyűrűre a* $\mathbb{Q}[x]$, *illetve a* $\mathbb{Z}[x]$ *polinomgyűrűkben, amely nem ideál, de tartalmaz minden* n*-re* n*-edfokú polinomot.*

5.3.19. *Igazoljuk, hogy egy* T *test fölötti* $n \times n$*-es felső háromszög-mátrixok* R *gyűrűjében ideált alkotnak azok a mátrixok, amelyeknek a főátlójában végig nulla áll, és a szerinte vett faktor a* T^n *direkt hatvánnyal izomorf.*

5.3.18. *Határozzuk meg az* $\mathbb{R}^{2\times 2}$ *ideáljait.*

5.2.6. *Legyen* $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$, *ahol* $\varphi(f) = f(i)$ *(vagyis* φ *az* i *behelyettesítése). Igazoljuk, hogy ez a leképezés gyűrűhomomorfizmus, határozzuk meg a képét és a magját, majd alkalmazzuk a homomorfizmustételt.*

5.2.7. *Az előző állításban megadott* $\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$ *izomorfizmusnál mi az* $x+1,\ x^2,\ x^3+3x+7,\ bx+a$ *polinomok maradékosztályainak a képe* $\mathbb{C}$*-ben?*

5.2.8. *Igazoljuk, hogy* $\mathbb{Q}[x]/(x^3-2) \cong \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a,b,c \in \mathbb{Q}\}$.

5.2.14. *Készítsük el az alábbi faktorgyűrűk műveleti tábláit, majd osztályozzuk őket izomorfia szerint. (Ha* n *egész szám, akkor* nR *az* R *gyűrű* $\{nr \mid r \in R\}$ *részgyűrűjét jelöli.)* $\mathbb{Z}_4/\{0\}$, $\mathbb{Z}_8/\{0,4\}$, $\mathbb{Z}_{16}/\{0,4,8,12\}$, $2\mathbb{Z}/(8)$, $2\mathbb{Z}_{16}/(8)$, $\mathbb{Z}/(4)$, $4\mathbb{Z}/(16)$, $\mathbb{Z}[x]/(4,x)$.

5.2.10. *Írjuk föl az* $L = \mathbb{Z}_2[x]/(x^2+x+1)$ *faktorgyűrű műveleti tábláit, és igazoljuk, hogy testet kaptunk. Keressünk benne* $\mathbb{Z}_2$*-vel izomorf* $\{O, E\}$ *résztestet (ahol* E *az egységelem,* O *a nullelem), és adjuk meg* L*-ben az* $Ex^2 + Ex + E$ *polinom gyökeit.*

5.2.15. *A* $\mathbb{Q}[x]/(x^2+x+1)$*-ben mi az* $x + (x^2+x+1)$ *inverze?*

5.2.19. *Lehet-e egy nullosztómentes, de nem egységelemes gyűrű faktorgyűrűje egységelemes? Lehet-e egy nullosztómentes gyűrű faktora nem nullosztómentes? És fordítva?*

5.1.20. *Adjunk példát olyan* $\varphi : R \to S$ *nem azonosan nulla gyűrűhomomorfizmusra két egységelemes gyűrű között, amely az egységelemet nem az egységelembe viszi. Lehet-e* φ *szürjektív? Van-e olyan példa, ahol* S *nullosztómentes?*

5.1.21. *Mutassuk meg, hogy két test közötti gyűrű-izomorfizmus mindig „testizomorfizmus” is, vagyis az (ellentett és) inverz képzését is tartja.*

5.1.23*. *Igazoljuk, hogy ha* m *és* n *relatív prímek, akkor* $\mathbb{Z}_{nm}$ *izomorf* $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$*-mel.*

5.3.16. *Mely* $m > 0$ *egészekre igaz, hogy a* $\mathbb{Z}_m$ *gyűrűben a nullosztók a nullával együtt ideált alkotnak?*

5.1.29*. *Mutassuk meg, hogy ha egy gyűrűben csak egyetlen bal oldali egységelem van, akkor ez kétoldali egységelem.*

5.1.30*. *Igazoljuk, hogy ha egy egységelemes gyűrű egy elemének csak egy balinverze van, akkor az jobbinverz is.*

5.1.32.** *Bizonyítsuk be, hogy ha egy egységelemes gyűrűben* $1-ab$ *invertálható, akkor* $1-ba$ *is.*