Bsc algebra3 keresztféléves tanári gyakorlat

Első feladatsor (2009. február 12–16)

A feladatok sorszámozasa megegyezik a Kiss: *Bevezetés az algebrába* jegyzetével, ezért a megoldások az internetről letöltve elolvashatók.

4.3.29. *Határozzuk meg a* $\mathbb{Z}_m^+$ *és* $\mathbb{Z}_m^\times$ *csoportok elemeinek a rendjeit, ahol* $m = 7, 8, 12$.

4.5.22. *Mutassuk meg, hogy a* D_4 *és a* Q *csoportok nem izomorfak.*

4.4.25. *Határozzuk meg Lagrange tételének felhasználásával az* S_3, $\mathbb{Z}_{12}^+$ *és a* $\mathbb{Z}_{12}^\times$ *csoportok összes részcsoportját, valamint az* A_4 *alternáló csoport összes negyedrendű részcsoportját.*

4.4.15, 4.7.8. *Adjuk meg az* S_3 *csoportban a* $H = \{id, (12)\}$ *részcsoport szerinti bal és jobb oldali mellékosztályokat, és igazoljuk, hogy* $(123)H \neq H(123)$. *Mutassuk meg, hogy az* $N = \{id, (123), (132)\}$ *részcsoportra, valamint a* $g = (12)$ *elemre* $gN = Ng$.

4.8.32. *Normálosztó-e a* $H \leq G$ *részcsoport:*

a) $G = \mathbb{Z}^+$, $H = 3\mathbb{Z}^+$.
b) $G = D_6$, $H = \{f^2, f^4, f^6 = 1\}$.
c) $G = D_6$, $H = \{1, f^3, t, tf^3\}$.
d) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, H *a diagonális mátrixok halmaza.*
e) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, H *az egységmátrix nem nulla skalárszorosaiból áll.*
f) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, H *a felső háromszögmátrixok halmaza.*

199. oldal. *Legyen* $G = \mathbb{Z}_{36}^\times$ *és* N *ebben a* 13 *által generált részcsoport. Határozzuk meg az* 5 *rendjét* G*-ben, valamint az* $5N$ *elem rendjét a* G/N *faktorcsoportban.*

4.7.27. *Ciklikus-e* $\mathbb{Z}_{16}^\times$, *illetve az* $\{1, 15\}$ *és az* $\{1, 9\}$ *szerinti faktorcsoportjai?*

4.7.6, 4.7.7. *Igazoljuk az alább megadott* $\varphi : G_1 \to G_2$ *leképezésekről, hogy homomorfizmusok, határozzuk meg a magjukat és a képüket.*

a) $G_1 = \mathbb{Z}^+$, $G_2 = \mathbb{Z}_n^+$, $\varphi(m)$ *az* m *maradéka* n*-nel osztva.*
b) $G_1 = \mathrm{GL}(n, T)$, $G_2 = T^\times$, $\varphi(A) = \det(A)$.
c) $G_1 = S_n$, $G_2 = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ *az* f *előjele (azaz* ± 1*).*
d) $G_1 = D_n$, $G_2 = \mathbb{Z}_2^+$, $\varphi(x) = 0$ *ha* x *forgatás,* 1 *ha* x *tengelyes tükrözés.*
e) $G_1 = G_2 = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(z) = |z|$.
f) $G_1 = \mathbb{R}[x]^+$, $G_2 = \mathbb{C}^+$, $\varphi(f) = f(i)$ *(vagyis* φ *az* i *behelyettesítése).*

4.7.17. *Jelölje* K *a komplex egységkört, vagyis az egy abszolút értékű komplex számok halmazát,* P *pedig a pozitív valós számok halmazát, mindkettőt ellátva a szorzás műveletével. A homomorfizmustétel alapján igazoljuk a következő izomorfizmusokat.*

a) $\mathbb{C}^\times / K \cong P$. *Milyen geometriai alakzatok ennek a faktornak az elemei?*
b) $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+ \cong K$.
c) $S_n / A_n \cong \mathbb{Z}^\times$.
d) $\mathbb{Z}^+ / n\mathbb{Z}^+ \cong \mathbb{Z}_n^+$.

4.8.38. *Melyik korábbról már ismert csoporttal izomorfak az alábbi faktorok?*

a) $D_4 / \{1, f^2\}$.
b) $S_4 / \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.
c) $D_8 / \{1, f^2, f^4, f^6\}$.