**Bsc algebra2 alapszintű gyakorlat**

*Második zárthelyi (2009. május 15.) — eredmények*

**1.** A permutációszorzást elvégezve $(1234)^{-1}H$ esetében is és $H(1234)^{-1}$ is a következő halmaz adódik: $\{(1234)^{-1} = (1432), (24), (1234), (13)\}$. A feladat kérdésére a válasz tehát igenlő. *Pontozás:* az elsőnek kiszámolt mellékosztályért 3 pont, a másodikért 2 pont jár, annak megállapításáért pedig, hogy a kettő egyenlő, 1 pont.

**2.** a) A 3 hatványai modulo 14 rendre $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 3 \cdot 9 = 13$, $3^4 = 11$, $3^5 = 5$, $3^6 = 1$. Ezért a 3 rendje 6 (1 pont). Mivel a csoport rendje $\varphi(14) = 6$, ezért a 3 generátorelem (1 pont). A hatvány rendjének képlete alapján a többi generátorelem úgy adódik, hogy a 3-at a 6-hoz relatív prím kitevőkre emeljük. Ezért még egy generátorelem van: a $3^5 = 5$ (2 pont). b) Mindkét csoport hatelemű ciklikus, ezért izomorfak (1 pont). A $\mathbb{Z}_9^\times$ azért ciklikus, mert a 9 prímhatvány (lásd az előadáson kimondott tételt), vagy pedig azért, mert a 2 generálja (1 pont).

**3.** Egy 14 rendű elem ciklusfelbontásában a ciklusok hossza 1, 2, 7 és 14 lehet. Mivel 11 elemű halmazon 14 hosszú ciklus nem fér el, ezért hetesciklusnak és kettesciklusnak is kell lennie (2 pont). Hetesciklus csak 1 fér, transzpozícióból így kettő kell, hogy a permutáció páros legyen (1 pont). Ezek száma $3 \cdot 6!\binom{11}{7}$, mert ha már megvan az, hogy melyik hét pont a hetesciklus, akkor a kimaradó 4-elemű halmazon $(1/2)\binom{4}{2}$-féleképpen tudunk két transzpozíciót elhelyezni (1 pont). Egy 28 rendű elem esetében a hetesciklus mellett négyesciklusnak kell szerepelnie (1 pont). Ekkor azonban páratlan permutációt kapunk, így a 28 rendű elemek száma $A_{11}$-ben nulla (1 pont).

**4.** A színezést megőrzi a zöld lapokkal párhuzamos, a kocka középpontján átmenő síkra való tükrözés, valamint a zöld lapok középpontjait összekötő egyenes körüli 90 fokos forgatás. Ezekkel minden csúcs elvihető minden szomszédjába, ezért a kocka nyolc csúcsán a keresett $G$ csoport tranzitív (3 pont), és így tetszőleges $A$ csúcs $H$ stabilizátorának indexe $G$-ben 8 (1 pont). Belátjuk, hogy $H$ elemszáma 2 (és így a keresett csoport elemszáma 16). Valóban, ha $A$ fixen marad, akkor az $A$-t tartalmazó zöld lap is. Ezért ezen a lapon fixen marad az $A$-val átellenes csúcs, továbbá fixen marad $A$-nak az a szomszédja is, ami a másik zöld lapon van. Ezért a transzformáció vagy az identitás, vagy az $A$ csúcsot a zöld lapok középpontjával összekötő síkra való tükrözés (2 pont). *Megjegyzés:* A megoldást ki lehet szenvedni közvetlenül is. Egy csúcs 8 helyre, ezt ismerve a szomszédja 2 helyre mehet, vagyis legfeljebb 16 transzformáció van. Ezek ugyanazok, mint a négyzet alapú hasábnál: a két zöld lapot fixáló trafók a négyzet szimmetriacsoportját, $D_4$-et alkotják, és mindegyik komponálható a zöld lapokat megcserélő fenti tükrözéssel. A keresett csoport $D_4 \times \mathbb{Z}_2^+$.

**5.** A diédercsoportbeli számolási szabályok miatt $(tf^4)(tf^{10}) = f^6$ (1 pont). Mivel $f$ rendje 20, ezért $f^6$ rendje a hatvány rendjének képlete miatt $20/(20, 6) = 10$ (1 pont). Ezért a keresett részcsoportban benne vannak $f$ páros kitevőjű hatványai. De benne van $(tf^{10})f^{10} = t$ is, és ezért minden olyan $tf^j$ elem, ahol $j$ páros (2 pont). Még azt kell ellenőrizni, hogy ezek részcsoportot alkotnak (1 pont). Ez azért igaz, mert a kapott transzformációk pontosan azok, amelyek a szabályos 20-szög csúcsai alkotta mindkét szabályos 10-szöget saját magukba viszik (1 pont). (A másik 20 transzformáció megcseréli ezt a két 10-szöget.)

**6.** A direkt szorzatban az elemrendekre vonatkozó tételt alkalmazva látjuk, hogy három darab másodrendű elem van: $(0, 1)$, $(2, 0)$ és $(2, 1)$, a nullelemen kívül pedig minden további elem negyedrendű (2 pont). Keressük meg először a négyelemű ciklikus részcsoportokat. Egy ilyenben két negyedrendű elem van, amik egymást generálják. Ezért az ilyen részcsoportok száma a negyedrendű elemek számának fele, azaz kettő. Ezek $\{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (0, 0)\}$ és $\{(1, 1), (2, 0), (3, 1), (0, 0)\}$ (2 pont). Egy Klein-féle részcsoport a nullelemen kívül három másodrendű elemből áll. Mivel összesen csak három ilyen elem van, az egyetlen jelölt a $\{(0, 1), (2, 0), (2, 1), (0, 0)\}$ (1 pont). Ezek tényleg részcsoportot alkotnak, ami közvetlen összeadással is ellenőrizhető, meg annak észrevételével is, hogy ez a $\{0, 2\} \times \mathbb{Z}_2^+$ részhalmaz, és $\{0, 2\}$ részcsoportja $\mathbb{Z}_4^+$-nak (1 pont).