Bsc algebra2 alapszintű gyakorlat

Első zárthelyi (2009. március 27.) — eredmények

1. a) Nem, mert nem zárt az összeadásra (0 pont). Például $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ benne van ebben a halmazban, de az összegük nincs (3 pont). b) Nincs benne, mert a három generáló polinomnak gyöke a 2, ezért minden lineáris kombinációjuknak is, de $x-1$-nek nem (3 pont). *Második megoldás:* Ha $x-1 = \alpha(x^2-4)+\beta(x^3-8)+\gamma(x-2)$ (1 pont), akkor x hatványai szerint rendezve az együtthatók a $-1 = -4\alpha - 8\beta - 2\gamma$, $1 = \gamma$, $0 = \alpha$, $0 = \beta$ egyenletrendszert adják (1 pont), aminek nyilvánvalóan nincs megoldása, ezért a tartalmazás nem teljesül (1 pont).

2. a) Ha $\alpha(v_1 + 2v_2) + \beta(v_2 - 3v_3) + \gamma v_3 = 0$, akkor átrendezve $\alpha v_1 + (2\alpha + \beta)v_2 + (\gamma - 3\beta)v_3 = 0$ (1 pont). Mivel v_1, v_2, v_3 függetlenek, ez csak úgy lehet, ha mindegyik együttható nulla (1 pont). Az egyenletrendszernek csak $\alpha = \beta = \gamma = 0$ megoldása, ezért a három vektor független (1 pont). b) Például $\{0, 1, x, x^2\}$ megfelel, mert $1, x, x^2$ független, de a 0 bármivel összefügg (3 pont). Jó megoldás például az $\{1, x, x^2, 2x^2\}$ is, itt x^2 és $2x^2$ lesz összefüggő.

3. a) Például $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ jó (1 pont, ha nincs több indoklás). A függetlenség is, a generátorrendszerség igazolása is 1 pont. Ezek hiányában 1 pont jár azért, ha valaki megjegyzi, hogy a dimenzió 3, mert három paraméterrel adható meg egy ilyen mátrix, vagy annak említéséért, hogy ez valódi altér, ezért a dimenzió legfejebb 3, és így elég a függetlenséget igazolni. b) Például $(x-i+1)(x+i+1) = x^2+2x+2$ és az x-szerese megfelel, a pontozás hasonló, mint az a) pontban.

4. Az A mátrixa $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1 pont), a B mátrixa $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (0 pont), ezért BA mátrixa két mátrix szorzata, vagyis $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (1 pont). Mivel $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$, ezért az (x, y) pont képe $(-y, 0)$ (1 pont). Az (x, y) akkor van a magtérben, ha $(-y, 0) = (0, 0)$, vagyis ha $y = 0$, ez az x-tengely. A képtér a $(-y, 0)$ alakú vektorok halmaza, ez is az x-tengely (3 pont). (Ha a képtér és a magtér közül csak egy van meg, az 2 pontot ér).

5. A karakterisztikus polinom $4x^2 - x^3$ (1 pont). A sajátértékek 0 és 4 (1 pont). A 0-hoz tartozó sajátaltér kétdimenziós és a $(-2y - 3z, y, z)^T$ alakú vektorokból áll (1 pont). A 4-hez tartozó sajátaltér egydimenziós és a $(z, 0, z)^T$ alakú vektorokból áll (1 pont). A minimálpolinom osztója $4x^2 - x^3$-nek, és gyökei a sajátértékek, ezért $x^3 - 4x^2$ vagy $x^2 - 4x$ lehet. A helyes válasz $x^2 - 4x$, mert már ennek is gyöke a mátrix (1 pont). Mivel a minimálpolinomnak nincs többszörös gyöke, ezért van sajátvektorokból álló bázis (1 pont). *Megjegyzés:* A 0-hoz tartozó sajátaltérben bázis $(-2, 1, 0)^T$ és $(-3, 0, 1)^T$, és ez $(1, 0, 1)^T$-gyel együtt sajátvektorokból álló bázis $\mathbb{R}^3$-ben. Ha ezt tudjuk, akkor a minimálpolinom csak $x^2 - 4x$ lehet (nem is kell behelyettesíteni a mátrixot), az $x^3 - 4x^2$ nem jó, mert annak van többszörös gyöke.

6. Írjuk föl a transzformációk mátrixát a tér szokásos bázisában. Ekkor egy transzformáció pontosan akkor viszi az x-tengelyt nullába, ha a mátrixának az első oszlopa végig nulla (3 pont). Mivel $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3)$ izomorf $\mathbb{R}^{3\times 3}$-mal, elegendő e mátrixok alterének dimenzióját megadni, ami könnyen láthatóan 6 (3 pont). *Második megoldás:* Legyen $v = (1, 0, 0)^T$ és tekintsük azt a B lineáris leképezést $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3)$-ből $\mathbb{R}^3$-be, amely A-hoz Av-t rendel. A keresett altér $\mathrm{Ker}(B)$. Viszont $\mathrm{Im}(B)$ az előírhatósági tétel miatt $\mathbb{R}^3$, ezért a dimenziótétel azt adja, hogy $\dim \mathrm{Ker}(B) = 3^2 - 3 = 6$.