NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 4. vizsga (alap- és középszint)/1** *2009. július 2.*

I. rész (75 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. A legalább elégséges osztályzat szükséges feltétele az első* 15 *és az utolsó* 15 *kérdésből egyaránt elért* 7 − 7 *pont. Alapszinten ez a feltétel elégséges is, de az osztályzat javítható a második rész megírásával.*

1. A $V = \mathbb{R}^+$ csoporton értelmezzük a $T = \mathbb{R}$ elemeivel való szorzást a $\lambda \odot v = v$ képlettel. Írjuk fel **az összes** olyan vektortéraxiómát, amely erre nem teljesül.

   $(\forall v \in V)(\forall \lambda, \mu \in T)\ ((\lambda + \mu) \odot v = \lambda \odot v + \mu \odot v)$.

2. Legyen V a sík, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortér, és $W = \{(x, y) \mid xy \leq 0\}$. Adjunk konkrét példát, ami mutatja, hogy W nem altér V-ben.

   $(1, -2)$ és $(-2, 1)$ benne van a halmazban, de összegük, azaz $(-1, -1)$ nincs benne.

3. Adjunk példát egy négydimenziós vektortérben olyan U és W kétdimenziós alterekre, melyekre $\dim(U \cap W) = 1$.

   Pl. $\mathbb{R}^4$-ben U a $\begin{pmatrix} p \\ q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alakú, W a $\begin{pmatrix} 0 \\ r \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$ alakú vektorok $(p, q, r, s \in \mathbb{R})$.

4. Egy V vektortérben van egy 12 elemű független rendszer, és egy 15 elemű **nem** minimális generátorrendszer. Mik $\dim V$ lehetséges értékei?

   $\dim V \in \{$ 12, 13, 14 $\}$

5. Adjunk meg a síkon egy olyan háromelemű vektorhalmazt, amelynek a három kételemű részhalmaza közül pontosan kettő független.

   Pl. $\{(0, 1), (0, 2), (1, 0)\}$.

6. Adjuk meg a térben a z-tengelyre való merőleges **vetítés** mátrixát a szokásos bázisban.

   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Legyen $A : \mathbb{R}^{3\times 2} \to \mathbb{R}$ az a lineáris leképezés, mely minden mátrixhoz az elemeinek az összegét rendeli. Mennyi $\dim \mathrm{Ker}(A)$?

   $\dim \mathrm{Ker}(A) =$ 5.

8. Legyen A lineáris transzformáció egy valós feletti vektortéren, $p(x) = x + 2$ és $B = p(A)$. Ha $A(v) = w$, akkor mennyi $B(v)$?

$w + 2v$

9–10. Az alábbi levezetésben A és B lineáris transzformációk egy V vektortéren és $v, w \in V$. Azt igazoljuk, hogy AB összegtartó. Mindegyik egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe a V, A, B, S, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:
- V) A vektortéraxiómák egyszerű következménye.
- A) A összegtartása.
- B) B összegtartása.
- S) Lineáris leképezések összegének definíciója.
- N) A fentiek közül egyik sem.

Pontozás: 0 vagy 1 hiba 2 pont, 2 hiba 1 pont, legalább három hiba 0 pont.

$$\begin{aligned}(AB)(v+w) &= \quad \boxed{\text{N}}\\ A(B(v+w)) &= \quad \boxed{\text{B}}\\ A(B(v)+B(w)) &= \quad \boxed{\text{A}}\\ A(B(v))+A(B(w)) &= \quad \boxed{\text{N}}\\ (AB)(v)+(AB)(w)&\end{aligned}$$

11. Legyen $A, B \in \mathrm{Hom}(V)$. Tudjuk, hogy AB rangja kisebb, mint A rangja. Az A és B közül melyiknek tudjuk ebből megállapítani a determinánsát, és az mennyi lesz?

$\det(B) = 0$

12. Adjuk meg $\mathbb{R}^{2\times 2}$ összes olyan elemét, melynek van kétdimenziós sajátaltere.

$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$, ahol $r \in \mathbb{R}$.

13. Adjunk meg egy olyan nem diagonalizálható mátrixot $\mathbb{C}^{3\times 3}$-ban, melynek rangja 3.

Pl. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vagy $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

14. Mi a síkon a +30 fokos forgatás minimálpolinomja?

$x^2 - \sqrt{3}x + 1$

15. Egy $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ diagonalizálható mátrix karakterisztikus polinomja $(x^2 + 1)(x - 1)^2$. Mik a minimálpolinom lehetséges értékei?

$m_A(x) = (x^2 + 1)(x - 1)$.

16. Hányadrendű lehet a kvaterniócsoportban két negyedrendű elem szorzata? Minden lehetségesnek vélt értékre adjunk is példaszorzatot.

$i(-i) = 1$ elsőrendű, $i^2 = -1$ másodrendű, $ij = k$ negyedrendű.

17. Adjunk meg a síkon két olyan másodrendű egybevágósági transzformációt, melyek kompozíciója végtelen rendű.

Például két párhuzamos egyenesre való tükrözés.

18. Adjunk meg a $\mathbb{C}^\times$ csoportban egy hatodrendű elemet.

Pl. $\cos 60° + i \sin 60°$.

19. Melyik az a legkisebb n, melyre az A_n alternáló csoportban van hatodrendű elem?

7 (az $(123)(45)(67)$ jó).

20. Ha a g csoportelem rendje 20, akkor a g^{38} által generált részcsoportban hány 5 rendű elem van?

$\varphi(5) = 4$.

21. Hány ciklikus részcsoportja van a D_4 diédercsoportnak?

7 (mert $\langle f \rangle = \langle f^3 \rangle$).

22. Hány elemű részcsoportot generálnak a D_8 diédercsoportban (együtt) a t és tf^4 elemek?

4

23. Hány elemű S_5-ben az összes másodrendű elem által generált részcsoport?

120

24. Legyen $G = \mathbb{Z}_{13}^\times$. Mely H részcsoport szerint alkotnak mellékosztályt a $\{2, 3, 10, 11\}$ elemek?

$H = \{1, 5, 8, 12\}$.

25. Egy kocka csúcsait összekötjük egymással az összes lehetséges módon. Hány pályája van a kocka szimmetriacsoportjának az így kapott, 28 szakaszból álló halmazon?

3 (élek, lapátlók, testátlók).

26. Hány elemű egy négyzet alapú egyenes hasáb szimmetriacsoportjában egy nem négyzet alakú lap középpontjának stabilizátora?

$16/4 = 4$.

27. Hány fixpontja van a D_{100} diédercsoport elemeinek együttvéve a szabályos 100-szög csúcsainak halmazán?

200

28. Hány másodrendű elem lehet egy hatelemű csoportban?

A másodrendű elemek száma a megfelelő csoportokban: 1 (a ciklikus csoportban),
3 (a D_3-ban).

29. Mely 144 elemű Abel-csoportoknak van 16 rendű eleme? Izomorfia erejéig mindegyiket csak egyszer soroljuk fel.

$\mathbb{Z}_{16}^+ \times \mathbb{Z}_9^+$ és $\mathbb{Z}_{16}^+ \times \mathbb{Z}_3^+ \times \mathbb{Z}_3^+$.

30. Adjuk meg $S_3 \times \mathbb{Z}_{15}^+$ egy tízelemű részcsoportját.

Az $((12), 3)$ által generált részcsoport.

NÉV: ____________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 4. vizsga (alap- és középszint)/5** *2009. július 2.*

II. rész (30 perc). *Az alábbi tétel helyes kimondása és a teljes bizonyítás leírása összesen 4 pontot ér. Középszintűeknek ebből legalább 3 pontot meg kell szerezni a legalább elégséges osztályzathoz. A választ a túloldalon is folytathatja, kérjük, hogy a fenti helyre írja rá a* **nevét** *és az* **ELTE-azonosítóját** *nyomtatott nagybetűkkel.*

31. **Mondjuk ki pontosan és igazoljuk a pálya és stabilizátor kapcsolatát leíró tételt.** Mind a pálya, mind a stabilizátor fogalmát definiálni kell, ez a tétel pontos kimondásával együtt 1 pontot ér. Aki a Kiss-könyvben szereplő bizonyítást írja le, az a felhasznált lemmát is igazolja.

OSZTÁLYZATOK: Amennyiben az első részre megvan a legalább $7 + 7$ pont, középszintűeknek pedig a második részre a legalább 3 pont, akkor a végső osztályzatot az alábbi táblázat adja meg, ahol S a dolgozat összpontszáma.

	Osztályzat
$S \leq 17$	2
$18 \leq S \leq 21$	3
$22 \leq S \leq 25$	4
$26 \leq S \leq 34$	5