NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 3. vizsga (alap- és középszint)/1** *2009. június 25.*

I. rész (75 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. A legalább elégséges osztályzat szükséges feltétele az első* 15 *és az utolsó* 15 *kérdésből egyaránt elért* 7 − 7 *pont. Alapszinten ez a feltétel elégséges is, de az osztályzat javítható a második rész megírásával.*

1. Legyen $V = \mathbb{R}^+$ és definiáljuk a $T = \mathbb{Z}_2$ test elemeivel, mint skalárokkal való szorzást a $0v = 0$ és $1v = v$ képlettel. Írjunk fel egy olyan vektortéraxiómát, amely ebben az esetben nem teljesül.

$(\forall \lambda, \mu \in T)(\forall v \in V)\ ((\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v)$ (például $\lambda = \mu = 1$-re $0 = 2v$-t ad).

2. Legyen $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortér, és W azon mátrixok halmaza, melyeknek van nulla eleme. Adjunk konkrét példát, ami mutatja, hogy W nem altér V-ben.

Pl. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$ és $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in W$, de az összegük nincs W-ben.

3. Legyen $V = \mathbb{Q}[x]$ mint vektortér $\mathbb{Q}$ fölött, W a legfeljebb másodfokú polinomokból és a nullából álló altér, U azon polinomok altere, melyeknek gyöke az 1. Igazoljuk, hogy $x^3 + x \in U + W$.

$x^3 + x = (x^3 - 1) + (x + 1)$.

4. Az $M \in \mathbb{R}^{9\times 6}$ mátrix rangja 2 és $W = \{\mathbf{x} \mid M\mathbf{x} = 0\}$ (itt $\mathbf{x}$ oszlopvektor). Mennyi $\dim W$?

$\dim W =\ 4.$

5. Egy V vektortérben van egy 12 elemű összefüggő generátorrendszer, és egy 9 elemű maximális független rendszer. Mik $\dim V$ lehetséges értékei?

$\dim V \in \{\ 9 \quad \}$

6. Egy $\mathbb{R}$ feletti vektortérben egy 100 vektorból álló vektorrendszer rangja 20 (a vektorok között lehetnek egyenlőek). Legalább hány olyan vektora van a rendszernek, ami kifejezhető a többiek lineáris kombinációjaként?

80.

7. Adjuk meg a térben az $\{(r, r, 0) \mid r \in \mathbb{R}\}$ egyenesre való tükrözés mátrixát a szokásos bázisban.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

8. Legyen V a sík lineáris transzformációinak vektortere $\mathbb{R}$ fölött, A az y-tengelyre való, B az x-tengelyre való merőleges vetítés. Hová viszi $(A - B)^2$ a $(0, 1)$ pontot?

A $(0, 1)$ pontba.

9–10. Az alábbi levezetésben A, B, C lineáris transzformációk egy V vektortéren és $v \in V$, az egyik disztributivitást igazoljuk. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe a T, A, S, P, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

T) A vektortéraxiómák közvetlen következménye.
A) Lineáris leképezés összegtartása.
S) Lineáris leképezések összegének definíciója.
P) Lineáris leképezések szorzatának definíciója.
N) A fentiek közül egyik sem.

Pontozás: 0 vagy 1 hiba 2 pont, 2 hiba 1 pont, legalább három hiba 0 pont.

$(CA+CB)(v) =$	S
$(CA)(v)+(CB)(v) =$	P
$C\big(A(v)\big)+C\big(B(v)\big) =$	A
$C\big(A(v)+B(v)\big) =$	S
$C\big((A+B)(v)\big) =$	P
$\big(C(A+B)\big)(v)$	

11. Az $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix bal oldali nullosztó. Mik a rangjának lehetséges értékei?

$\rho(M) \in \{\ 1 \qquad \}$

12. Soroljuk föl a térben egy origót tartalmazó síkra való tükrözés sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátaltér dimenzióját.

Sajátértékek:	1,	-1
Sajátalterek dimenziói:	2,	1

13. Adjunk meg egy olyan $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixot, melyhez tartozó transzformációnak a minimálpolinomja $x(x-1)$, és az 1 sajátértékhez 2-dimenziós sajátaltér tartozik.

Pl. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14. Mi a síkon a +60 fokos forgatás minimálpolinomja?

$x^2 - x + 1$

15. Egy $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ diagonalizálható mátrix karakterisztikus polinomja $(x^2+1)^2$. Mik a minimálpolinom lehetséges értékei?

$m_A(x) = x^2 + 1$

16. Számítsuk ki a kvaterniócsoportban az $ijk^{-1}i$ szorzatot.

$ijk^{-1}i = i$

17. Adjunk meg a sík egybevágósági transzformációinak kompozícióra vett csoportjában egy tizedrendű elemet.

Egy 36 fokos forgatás.

18. Adjunk meg egy negyedrendű elemet az A_6 alternáló csoportban

Pl. (1234)(56).

19. Hány 61 rendű elem van az S_{61} szimmetrikus csoportban?

60!

20. A D_{12} diédercsoport $tftf^3$ által generált részcsoportjában soroljuk föl a másodrendű elemeket.

Másodrendű: f^6

21. Ha a g csoportelem rendje 20, akkor a g^6 által generált részcsoportban hány 4 rendű elem van?

0

22. Adjuk meg $\mathbb{Z}_{30}^{+}$-ban a 14 és a 21 által (együtt) generált részcsoport elemszámát.

30

23. Adjunk példát olyan csoportra, ahol a másodrendű elemek és az egységelem nem alkotnak részcsoportot.

D_4

24. Adjunk példát olyan nem üres részhalmazra egy csoportban, amely zárt a műveletre, de mégsem részcsoport.

Pl. $\mathbb{Z}^{+}$-ban a pozitív számok.

25. A $\{3, 5, 6\}$ elemek a $\mathbb{Z}_7^{\times}$ csoport mely H részcsoportja szerint alkotnak mellékosztályt?

$H = \{1, 2, 4\}$.

26. Hány pályája van a D_{20} diédercsoportnak a szabályos 20-szög átlóinak halmazán? (Az oldalakat nem tekintjük átlónak.)

9

27. Hány elemű a kocka szimmetriacsoportjában egy élfelező pont stabilizátora?

$48/12 = 4$.

28. Az S_{2009} szimmetrikus csoportban összeadjuk a permutációk fixpontjainak a számát. Mi lesz az eredmény?

2009!

29. Bontsuk fel a $\mathbb{Z}_{60}^+$ csoportot a véges Abel-csoportok alaptétele szerint.

$\mathbb{Z}_3^+ \times \mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_5^+$.

30. Melyek azok a 40 rendű Abel-csoportok, amelyekben van 20 rendű elem? Izomorf csoportokat csak egyszer soroljunk fel.

$\mathbb{Z}_5^+ \times \mathbb{Z}_8^+$, $\mathbb{Z}_5^+ \times \mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_2^+$.

NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 3. vizsga (alap- és középszint)/5** *2009. június 25.*

II. rész (30 perc). *Az alábbi tétel teljes bizonyításának leírása összesen 4 pontot ér. Középszintűeknek ebből legalább 3 pontot meg kell szerezni a legalább elégséges osztályzathoz. A választ a túloldalon is folytathatja, kérjük, hogy a fenti helyre írja rá a* **nevét** *és az* **ELTE-azonosítóját** *nyomtatott nagybetűkkel.*

31. **Igazoljuk, hogy egy valódi altér dimenziója kisebb, mint a téré.** A felhasznált segédállításokat a bázis jellemzéseiről pontosan ki kell mondani, de azokat nem kell bebizonyítani.

OSZTÁLYZATOK: Amennyiben az első részre megvan a legalább 7 + 7 pont, középszintűeknek pedig a második részre a legalább 3 pont, akkor a végső osztályzatot az alábbi táblázat adja meg, ahol S a dolgozat összpontszáma.

	Osztályzat
$S \leq 17$	2
$18 \leq S \leq 21$	3
$22 \leq S \leq 25$	4
$26 \leq S \leq 34$	5