

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

Mat. I. (BSc.)

Algebra2: 2. vizsga (alap- és középszint)/1

2009. június 11.

I. rész (75 perc). Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. A legalább elégséges osztályzat szükséges feltétele az első 15 és az utolsó 15 kérdésből egyaránt elért 7 – 7 pont. Alapszinten ez a feltétel elégséges is, de az osztályzat javítható a második rész megírásával.

1. Legyen V a sík az összeadásra, és definiáljunk \mathbb{R} elemeivel egy újfajta skalárral szorzást: $\lambda \odot v$ legyen mindig nulla. Írjunk fel egy olyan vektortérxiómát, amely erre nem teljesül.

$$\forall v \in V (1 \odot v = v).$$

2. Legyen V a sík, mint \mathbb{R} fölötti vektortér, és $W = \{(x, y) \mid xy \geq 0\}$. Adjunk konkrét példát, ami mutatja, hogy W nem altér V -ben.

$(1, 2)$ és $(-2, -1)$ benne van a halmazban, de összegük, azaz $(-1, 1)$ nincs benne.

3. Adjunk meg a síkon olyan $U \neq W$ altereket, melyek $U + W$ összege **nem** U és V direkt összege.

Pl. U az egész sík, W egy origón átmenő egyenes.

4. Az $M \in \mathbb{R}^{6 \times 9}$ mátrix rangja 2 és $W = \{\mathbf{x} \mid M\mathbf{x} = 0\}$. Mennyi $\dim W$?

$$\dim W = 7.$$

5. Egy V vektortérben van egy 12-dimenziós valódi altér, és egy 15 elemű generátorrendszer. Mik $\dim V$ lehetséges értékei?

$$\dim V \in \{13, 14, 15\}$$

6. Adjunk meg a síkon egy olyan háromelemű vektorrendszert, amelynek csak az egyik elemét lehet kifejezni a többiek lineáris kombinációjaként, a másik kettőt nem.

$$\{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}.$$

7. Adjuk meg a térben az xy síkra való függőleges vetítés mátrixát a szokásos bázisban.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Legyen V a sík lineáris transzformációinak vektortere \mathbb{R} fölött, A a $+90$ fokos forgatás, B az y -tengelyre való tükrözés. Hová viszi $A + B$ a $(0, 1)$ pontot?

A $(-1, 1)$ pontba.

9–10. Az alábbi levezetésben A és B lineáris transzformációk egy V vektortéren és $v, w \in V$. Azt igazoljuk, hogy $A + B$ összegtartó. Mindegyik egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe a K, L, S, T, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

K) A vektorösszeadás kommutativitása.

L) Lineáris leképezések összeadásának kommutativitása.

S) Lineáris leképezés összegtartása.

T) Lineáris leképezések összegének definíciója.

N) A fentiek közül egyik sem.

Pontozás: 0 vagy 1 hiba 2 pont, 2 hiba 1 pont, legalább három hiba 0 pont.

$$\begin{aligned} (A + B)(v + w) &= \boxed{\text{T}} \\ A(v + w) + B(v + w) &= \boxed{\text{S}} \\ A(v) + A(w) + B(v) + B(w) &= \boxed{\text{K}} \\ A(v) + B(v) + A(w) + B(w) &= \boxed{\text{T}} \\ (A + B)(v) + (A + B)(w) & \end{aligned}$$

11. Az $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrix rangjának mely értékeire lesz az $MXM = 0$ egyenlet megoldása az $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrixok körében **nem** egyértelmű?

$$\rho(M) \in \{ 0, 1 \}$$

12. Soroljuk föl a térben egy origót tartalmazó egyenesre való tükrözés sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátaltér dimenzióját.

Sajátértékek:	1,	-1
Sajátaltérek dimenziói:	1,	2

13. Adjunk meg egy olyan nem diagonalizálható mátrixot $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ -ben, melynek rangja 1.

$$\text{Pl. } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

14. Mi a síkon a 180 fokos forgatás minimálpolinomja?

$$x + 1$$

15. Egy $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ **nem** diagonalizálható mátrix karakterisztikus polinomja $(x^2 + 1)^2$. Mik a minimálpolinom lehetséges értékei?

$$m_A(x) = (x + i)^2(x - i), (x + i)(x - i)^2, (x + i)^2(x - i)^2.$$

16. Számítsuk ki a kvaterniócsoportban a $kjk^{-1}i$ szorzatot.

$$kjk^{-1}i = k$$

17. Adjunk meg a sík egybevágósági transzformációinak kompozícióra vett csoportjában egy végtelen rendű elemet.

Pl. tetszőleges nem identikus eltolás.

18. Hány másodrendű elem van az A_4 alternáló csoportban?

3

19. A D_8 diédercsoportban az $f^{-k}tf^k$ kifejezés k mely egész értékeire lesz negyedrendű?

Akkor, ha k páratlan (ez az elem f^{-2k} , aminek a negyedik hatványa mindig 1, és ha k páros, akkor már a négyzete is).

20. Ha a g csoportelem rendje 20, akkor a g által generált részcsoporthoz hány 10 rendű elem van?

$$\varphi(10) = 4.$$

21. Hány 300 rendű elem van egy 10000000000 elemű ciklikus csoportban?

300 rendű elemek száma = 0

22. Hány olyan 16 elemű csoport van izomorfia erejéig, amelynek csak 2 részcsoporthoz van?

Csoportok száma = 0

23. Mekkora az f^2 által generált részcsoporthoz indexe a D_6 diédercsoportban?

4

24. Legyen $G = \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$. Mely H részcsoporthoz szerint alkotnak mellékosztályt az $\{(x, y) \mid x + y = 1\}$ elemek?

$$H = \{(x, y) \mid x + y = 0\}.$$

25. Hány pályája van a sík összes egybevágósági transzformációiból álló csoportnak a sík köreinek halmazán?

Végtelen sok (mert különböző sugarú körök nem vihetők egymásba).

26. Hány elemű a kocka szimmetriacsoportjában egy lapközéppont stabilizátora?

$48/6 = 8$ (izomorf D_4 -gyel).

27. Hány elemű az S_5 szimmetrikus csoportban az A_5 összes eleme és az (1234) által együtt generált részcsoporthoz?

120

28. Hány 20 rendű elem van $S_3 \times \mathbb{Z}_{30}^+$ -ban?

20 rendű elemek száma = 0

29. Hány másodrendű elem lehet egy nyolcelemű nemkommutatív csoportban?

A másodrendű elemek száma a megfelelő csoportokban: 1 (a kvaterniócsoportban),
5 (a D_4 -ben).

30. Izomorfia erejéig hány 72 elemű Abel-csoport létezik?

72 elemű Abel-csoportok száma = 6

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

Mat. I. (BSc.)

Algebra2: 2. vizsga (alap- és középszint)/5

2009. június 11.

II. rész (30 perc). Az alábbi tétel helyes kimondása és a teljes bizonyítás leírása összesen 4 pontot ér. Középszintűeknek ebből legalább 3 pontot meg kell szerezni a legalább elégséges osztályzathoz. A választ a túloldalon is folytathatja, kérjük, hogy a fenti helyre írja rá a **nevét** és az **ELTE-azonosítóját** nyomtatott nagybetűkkel.

31. Mondjuk ki pontosan és igazoljuk a Lagrange tételének bizonyításában szereplő, két bal oldali mellékosztály metszetéről szóló állítást. Lagrange tételét magát nem kell bizonyítani, sem kimondani.

OSZTÁLYZATOK: Amennyiben az első részre megvan a legalább $7 + 7$ pont, középszintűeknek pedig a második részre a legalább 3 pont, akkor a végső osztályzatot az alábbi táblázat adja meg, ahol S a dolgozat összpontszáma.

	<i>Osztályzat</i>
$S \leq 17$	2
$18 \leq S \leq 21$	3
$22 \leq S \leq 25$	4
$26 \leq S \leq 34$	5