NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 1. vizsga (alap- és középszint)/1** *2009. május 25.*

I. rész (75 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. A legalább elégséges osztályzat szükséges feltétele az első* 15 *és az utolsó* 15 *kérdésből egyaránt elért* $7-7$ *pont. Alapszinten ez a feltétel elégséges is, de az osztályzat javítható a második rész megírásával.*

1. Legyen V a valós számok halmaza, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortér, és $W \subseteq V$ az 1-nél nagyobb valós számok halmaza. Írjuk fel az(oka)t a vektortéraxiómá(ka)t, amely(ek) W-ben nem teljesül(nek).

a) $\exists 0 \in W\ \forall v \in W\ (v+0=0+v=v)$; b) $\forall v \in W\ \exists w \in W\ (v+w=w+v=0)$. (és az is, hogy $\forall v \in V\ \forall \lambda \in T\ \exists (\lambda \cdot v) \in W$.)

2. Adjunk példát, ami mutatja, hogy a legalább huszadfokú polinomok $\mathbb{R}[x]$-ben a nullapolinommal együtt nem alkotnak alteret $\mathbb{R}$ fölött.

x^{20} és $x-x^{20}$ benne van a halmazban, de összegük, azaz x nincs benne.

3. Definiáljuk a W és U alterek összegének fogalmát.

$W+U=\ \{w+u \mid w \in W, u \in U\}$.

4. Adjunk meg a térben az (x,x,x) $(x \in \mathbb{R})$ pontokból álló egyeneshez egy direkt kiegészítő alteret.

Például az xy sík, vagyis az $(x,y,0)$ alakú pontok halmaza.

5. Egy V vektortérben van egy 12 elemű, lineárisan összefüggő generátorrendszer és egy 10 rangú vektorrendszer. Mik $\dim V$ lehetséges értékei?

$\dim V \in \{\ 10,\ 11\ \}$

6. Adjunk meg a síkon egy olyan háromelemű vektorrendszert, amelynek két elemét ki lehet fejezni a többiek lineáris kombinációjaként, de a harmadikat nem.

$\{(1,0),(0,1),(0,2)\}$.

7. Adjuk meg a térben a z tengely körüli egyik 90 fokos forgatás mátrixát a szokásos bázisban.

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. Legyen V a sík lineáris transzformációinak vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Az identitás ellentettje hová viszi a $(2,1)$ pontot?

A $(-2,-1)$ pontba.

9–10. Az alábbi levezetésben A, B, C lineáris transzformációk egy V vektortéren és $v \in V$, az egyik disztributivitást igazoljuk. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az A, O, D, S, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

A) A vektortéraxiómák közvetlen következménye.
O) Lineáris leképezés összegtartása.
D) Lineáris leképezések összegének definíciója.
S) Lineáris leképezések szorzatának definíciója.
N) A fentiek közül egyik sem.

Pontozás: 0 vagy 1 hiba 2 pont, 2 hiba 1 pont, legalább három hiba 0 pont.

$$\begin{aligned} (AC+BC)(v) &= && \boxed{\text{D}} \\ (AC)(v)+(BC)(v) &= && \boxed{\text{S}} \\ A\big(C(v)\big)+B\big(C(v)\big) &= && \boxed{\text{D}} \\ (A+B)\big(C(v)\big) &= && \boxed{\text{S}} \\ \big((A+B)C\big)(v) & && \end{aligned}$$

11. Az $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertálható. Mik a rangjának lehetséges értékei?

$\rho(M) = 3$

12. Soroljuk föl a térben egy origót tartalmazó síkra való merőleges vetítés sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátaltér dimenzióját.

Sajátértékek:	1,	0
Sajátalterek dimenziói:	2,	1

13. Adjunk meg egy olyan nem diagonalizálható mátrixot $\mathbb{C}^{2\times 2}$-ben, melynek sajátértéke a 2.

Pl. $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

14. Mi a nulla transzformáció minimálpolinomja?

x

15. Egy $M \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ nem diagonalizálható mátrix karakterisztikus polinomja $(x-1)^2(x-2)(x-3)$. Mik a minimálpolinom lehetséges értékei?

$m_A(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)$.

16. Definiáljuk a valós fölötti általános lineáris csoportokat.

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ az $n \times n$-es invertálható valós mátrixok csoportja a szorzásra.

17. Mennyi az A_5 csoport elemszáma?

$|A_5| = 60$

18. Számítsuk ki a kvaterniócsoportban a $jik^{-1}j$ szorzatot.

$jik^{-1}j = -j$

19. Számítsuk ki a D_6 diédercsoportban az $f^{-2}tf^{47}t$ rendjét.

$f^{-2}tf^{47}t$ rendje 6 (ez az elem az f^5).

20. Ha a g csoportelem rendje 2000, mennyi lesz g^{300} rendje?

$o(g^{300}) = 2000/(2000, 300) = 20.$

21. Hány ötödrendű elem van egy 10000000000 elemű ciklikus csoportban?

Ötödrendű elemek száma = 4

22. Hány részcsoportja lehet egy 61 elemű csoportnak?

Részcsoportok száma = 2

23. Mekkora a 61-gyel osztható számok alkotta H részcsoport indexe $\mathbb{Z}^+$-ban?

$|\mathbb{Z}^+ : H| = 61$

24. A $\mathbb{C}^\times$ csoportban a 2 abszolút értékű számok mellékosztályt alkotnak. Melyik H részcsoport szerinti mellékosztályról van szó?

H az 1 abszolút értékű számok.

25. Hány pályája van a D_4 diédercsoportnak az egység oldalú négyzet oldalait ötödölő pontok 20 elemű halmazán (a csúcsokat is bevéve), és mennyi ezek elemszáma?

A pálya elemei:	A pálya elemszáma:
a csúcsok	4
a csúcsoktól 1/5 távolságra levő pontok	8
a csúcsoktól 2/5 távolságra levő pontok	8

26. Soroljuk fel A_4-ben a 3 stabilizátorának elemeit.

id, (124), (142)

27. Adjunk meg egy olyan $2009 < n \in \mathbb{Z}^+$ elemet, hogy n és 120 generálja $\mathbb{Z}^+$-t.

Pl. $n =$ 12000001

28. Hány hatodrendű elem van $S_3 \times \mathbb{Z}_2^+$-ban?

Hatodrendű elemek száma = 2

29. Hány másodrendű elem lehet egy négyelemű csoportban?

Másodrendű elemek száma lehet: 1 vagy 3.

30. Izomorfia erejéig hány 120 elemű Abel-csoport létezik?

120 elemű Abel-csoportok száma = 3

NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 1. vizsga (alap- és középszint)/5** *2009. május 25.*

II. rész (30 perc). *Az alábbi tétel helyes kimondása és a teljes bizonyítás leírása összesen 4 pontot ér. Középszintűeknek ebből legalább 3 pontot meg kell szerezni a legalább elégséges osztályzathoz. A választ a túloldalon is folytathatja, kérjük, hogy a fenti helyre írja rá a* **nevét** *és az* **ELTE-azonosítóját** *nyomtatott nagybetűkkel.*

31. **Valódi altér dimenziója kisebb, mint a téré.** A felhasznált segédállításokat a bázis jellemzéseiről pontosan ki kell mondani, de azokat nem kell bebizonyítani.

OSZTÁLYZATOK: Amennyiben az első részre megvan a legalább $7+7$ pont, középszintűeknek pedig a második részre a legalább 3 pont, akkor a végső osztályzatot az alábbi táblázat adja meg, ahol S a dolgozat összpontszáma.

	Osztályzat
$S \leq 17$	2
$18 \leq S \leq 21$	3
$22 \leq S \leq 25$	4
$26 \leq S \leq 34$	5