

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

Mat. I. (BSc.)

Algebra2: 4. vizsga (alap- és középszint)/1

2009. július 2.

I. rész (75 perc). Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. A legalább elégséges osztályzat szükséges feltétele az első 15 és az utolsó 15 kérdésből egyaránt elért 7 – 7 pont. Alapszinten ez a feltétel elégséges is, de az osztályzat javítható a második rész megírásával.

1. A $V = \mathbb{R}^+$ csoporton értelmezzük a $T = \mathbb{R}$ elemeivel való szorzást a $\lambda \odot v = v$ képlettel. Írjuk fel **az összes** olyan vektortéraxiómát, amely erre nem teljesül.

2. Legyen V a sík, mint \mathbb{R} fölötti vektortér, és $W = \{(x, y) \mid xy \leq 0\}$. Adjunk konkrét példát, ami mutatja, hogy W nem altér V -ben.

3. Adjunk példát egy négydimenziós vektortérben olyan U és W kétdimenziós alterekre, melyekre $\dim(U \cap W) = 1$.

4. Egy V vektortérben van egy 12 elemű független rendszer, és egy 15 elemű **nem** minimális generátorrendszer. Mik $\dim V$ lehetséges értékei?

$\dim V \in \{ \quad \quad \quad \}$

5. Adjunk meg a síkon egy olyan háromelemű vektorhalmazt, amelynek a három kételemű részhalma közül pontosan kettő független.

6. Adjuk meg a térben a z -tengelyre való merőleges **vetítés** mátrixát a szokásos bázisban.

7. Legyen $A : \mathbb{R}^{3 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ az a lineáris leképezés, mely minden mátrixhoz az elemeinek az összegét rendeli. Mennyi $\dim \text{Ker}(A)$?

$\dim \text{Ker}(A) =$

8. Legyen A lineáris transzformáció egy valós feletti vektortéren, $p(x) = x + 2$ és $B = p(A)$. Ha $A(v) = w$, akkor mennyi $B(v)$?

- 9–10. Az alábbi levezetésben A és B lineáris transzformációk egy V vektortéren és $v, w \in V$. Azt igazoljuk, hogy AB összegtartó. Mindegyik egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe a V, A, B, S, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

V) A vektortéraxiómák egyszerű következménye.

A) A összegtartása.

B) B összegtartása.

S) Lineáris leképezések összegének definíciója.

N) A fentiek közül egyik sem.

Pontozás: 0 vagy 1 hiba 2 pont, 2 hiba 1 pont, legalább három hiba 0 pont.

$$(AB)(v + w) = \quad \square$$

$$A(B(v + w)) = \quad \square$$

$$A(B(v) + B(w)) = \quad \square$$

$$A(B(v)) + A(B(w)) = \quad \square$$

$$(AB)(v) + (AB)(w)$$

11. Legyen $A, B \in \text{Hom}(V)$. Tudjuk, hogy AB rangja kisebb, mint A rangja. Az A és B közül melyiknek tudjuk ebből megállapítani a determinánsát, és az mennyi lesz?

12. Adjuk meg $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ összes olyan elemét, melynek van kétdimenziós sajátaltére.

13. Adjunk meg egy olyan nem diagonalizálható mátrixot $\mathbb{C}^{3 \times 3}$ -ban, melynek rangja 3.

14. Mi a síkon a +30 fokok forgatás minimálpolinomja?

15. Egy $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ diagonalizálható mátrix karakterisztikus polinomja $(x^2 + 1)(x - 1)^2$. Mik a minimálpolinom lehetséges értékei?

16. Hányadrendű lehet a kvaterniócsoportban két negyedrendű elem szorzata? Minden lehetségesnek vélt értékre adjunk is példaszorzatot.

17. Adjunk meg a síkon két olyan másodrendű egybevágósági transzformációt, melyek kompozíciója végtelen rendű.

18. Adjunk meg a \mathbb{C}^\times csoportban egy hatodrendű elemet.

19. Melyik az a legkisebb n , melyre az A_n alternáló csoportban van hatodrendű elem?

20. Ha a g csoportelem rendje 20, akkor a g^{38} által generált részcsoporthoz hány 5 rendű elem van?

21. Hány ciklikus részcsoporthoz van a D_4 diédercsoportnak?

22. Hány elemű részcsoporthoz generálnak a D_8 diédercsoportban (együtt) a t és tf^4 elemek?

23. Hány elemű S_5 -ben az összes másodrendű elem által generált részcsoporthoz?

24. Legyen $G = \mathbb{Z}_{13}^\times$. Mely H részcsoporthoz alkotnak mellékosztályt a $\{2, 3, 10, 11\}$ elemek?

25. Egy kocka csúcsait összekötjük egymással az összes lehetséges módon. Hány pályája van a kocka szimmetriacsoportjának az így kapott, 28 szakaszból álló halmazon?

26. Hány elemű egy négyzet alapú egyenes hasáb szimmetriacsoportjában egy nem négyzet alakú lap középpontjának stabilizátora?

27. Hány fixpontja van a D_{100} diédercsoport elemeinek együttevén a szabályos 100-szög csúcsainak halmazán?

28. Hány másodrendű elem lehet egy hatelemű csoportban?

A másodrendű elemek száma a megfelelő csoportokban:

29. Mely 144 elemű Abel-csoportoknak van 16 rendű eleme? Izomorfia erejéig mindegyiket csak egyszer soroljuk fel.

30. Adjuk meg $S_3 \times \mathbb{Z}_{15}^+$ egy tízelemű részcsoportját.

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

Mat. I. (BSc.)

Algebra2: 4. vizsga (alap- és középszint)/5

2009. július 2.

II. rész (30 perc). Az alábbi tétel helyes kimondása és a teljes bizonyítás leírása összesen 4 pontot ér. Középszintűeknek ebből legalább 3 pontot meg kell szerezni a legalább elégséges osztályzathoz. A választ a túloldalon is folytathatja, kérjük, hogy a fenti helyre írja rá a nevét és az **ELTE-azonosítóját** nyomtatott nagybetűkkel.

31. Mondjuk ki pontosan és igazoljuk a pálya és stabilizátor kapcsolatát leíró tételt. Mind a pálya, mind a stabilizátor fogalmát definiálni kell, ez a tétel pontos kimondásával együtt 1 pontot ér. Aki a Kiss-könyvben szereplő bizonyítást írja le, az a felhasznált lemmát is igazolja.

OSZTÁLYZATOK: Amennyiben az első részre megvan a legalább 7 + 7 pont, középszintűeknek pedig a második részre a legalább 3 pont, akkor a végső osztályzatot az alábbi táblázat adja meg, ahol S a dolgozat összpontszáma.

	<i>Osztályzat</i>
$S \leq 17$	2
$18 \leq S \leq 21$	3
$22 \leq S \leq 25$	4
$26 \leq S \leq 34$	5