NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 2. vizsga (alap- és középszint)/1** *2009. június 11.*

I. rész (75 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. A legalább elégséges osztályzat szükséges feltétele az első* 15 *és az utolsó* 15 *kérdésből egyaránt elért* $7-7$ *pont. Alapszinten ez a feltétel elégséges is, de az osztályzat javítható a második rész megírásával.*

1. Legyen V a sík az összeadásra, és definiáljunk $\mathbb{R}$ elemeivel egy újfajta skalárral szorzást: $\lambda \odot v$ legyen mindig nulla. Írjunk fel egy olyan vektortéraxiómát, amely erre nem teljesül.

2. Legyen V a sík, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortér, és $W = \{(x,y) \mid xy \geq 0\}$. Adjunk konkrét példát, ami mutatja, hogy W nem altér V-ben.

3. Adjunk meg a síkon olyan $U \neq W$ altereket, melyek $U+W$ összege **nem** U és V direkt összege.

4. Az $M \in \mathbb{R}^{6\times 9}$ mátrix rangja 2 és $W = \{\mathbf{x} \mid M\mathbf{x} = 0\}$. Mennyi $\dim W$?

   $\dim W =$

5. Egy V vektortérben van egy 12-dimenziós valódi altér, és egy 15 elemű generátorrendszer. Mik $\dim V$ lehetséges értékei?

   $\dim V \in \{ \quad \}$

6. Adjunk meg a síkon egy olyan háromelemű vektorrendszert, amelynek csak az egyik elemét lehet kifejezni a többiek lineáris kombinációjaként, a másik kettőt nem.

7. Adjuk meg a térben az xy síkra való függőleges vetítés mátrixát a szokásos bázisban.

8. Legyen V a sík lineáris transzformációinak vektortere $\mathbb{R}$ fölött, A a $+90$ fokos forgatás, B az y-tengelyre való tükrözés. Hová viszi $A+B$ a $(0,1)$ pontot?

9–10. Az alábbi levezetésben A és B lineáris transzformációk egy V vektortéren és $v, w \in V$. Azt igazoljuk, hogy $A+B$ összegtartó. Mindegyik egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe a K, L, S, T, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

K) A vektorösszeadás kommutativitása.
L) Lineáris leképezések összeadásának kommutativitása.
S) Lineáris leképezés összegtartása.
T) Lineáris leképezések összegének definíciója.
N) A fentiek közül egyik sem.

Pontozás: 0 vagy 1 hiba 2 pont, 2 hiba 1 pont, legalább három hiba 0 pont.

$$
\begin{aligned}
(A+B)(v+w) &= \quad \square \\
A(v+w)+B(v+w) &= \quad \square \\
A(v)+A(w)+B(v)+B(w) &= \quad \square \\
A(v)+B(v)+A(w)+B(w) &= \quad \square \\
(A+B)(v)+(A+B)(w)
\end{aligned}
$$

11. Az $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix rangjának mely értékeire lesz az $MXM = 0$ egyenlet megoldása az $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixok körében **nem** egyértelmű?

$\rho(M) \in \{ \qquad \}$

12. Soroljuk föl a térben egy origót tartalmazó egyenesre való tükrözés sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátaltér dimenzióját.

Sajátértékek:
Sajátalterek dimenziói:

13. Adjunk meg egy olyan nem diagonalizálható mátrixot $\mathbb{C}^{2\times 2}$-ben, melynek rangja 1.

Pl. $M =$

14. Mi a síkon a 180 fokos forgatás minimálpolinomja?

15. Egy $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ **nem** diagonalizálható mátrix karakterisztikus polinomja $(x^2+1)^2$. Mik a minimálpolinom lehetséges értékei?

$m_A(x) =$

16. Számítsuk ki a kvaterniócsoportban a $kjk^{-1}i$ szorzatot.

$kjk^{-1}i =$

17. Adjunk meg a sík egybevágósági transzformációinak kompozícióra vett csoportjában egy végtelen rendű elemet.

18. Hány másodrendű elem van az A_4 alternáló csoportban?

19. A D_8 diédercsoportban az $f^{-k}tf^kt$ kifejezés k mely egész értékeire lesz negyedrendű?

20. Ha a g csoportelem rendje 20, akkor a g által generált részcsoportban hány 10 rendű elem van?

21. Hány 300 rendű elem van egy 10000000000 elemű ciklikus csoportban?

300 rendű elemek száma =

22. Hány olyan 16 elemű csoport van izomorfia erejéig, amelynek csak 2 részcsoportja van?

Csoportok száma =

23. Mekkora az f^2 által generált részcsoport indexe a D_6 diédercsoportban?

24. Legyen $G = \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$. Mely H részcsoport szerint alkotnak mellékosztályt az $\{(x, y) \mid x + y = 1\}$ elemek?

25. Hány pályája van a sík összes egybevágósági transzformációiból álló csoportnak a sík köreinek halmazán?

26. Hány elemű a kocka szimmetriacsoportjában egy lapközéppont stabilizátora?

27. Hány elemű az S_5 szimmetrikus csoportban az A_5 összes eleme és az (1234) által együtt generált részcsoport?

28. Hány 20 rendű elem van $S_3 \times \mathbb{Z}_{30}^{+}$-ban?

20 rendű elemek száma =

29. Hány másodrendű elem lehet egy nyolcelemű nemkommutatív csoportban?

A másodrendű elemek száma a megfelelő csoportokban:

30. Izomorfia erejéig hány 72 elemű Abel-csoport létezik?

72 elemű Abel-csoportok száma =

NÉV: ____________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

Mat. I. (BSc.) **Algebra2: 2. vizsga (alap- és középszint)/5** *2009. június 11.*

II. rész (30 perc). *Az alábbi tétel helyes kimondása és a teljes bizonyítás leírása összesen 4 pontot ér. Középszintűeknek ebből legalább 3 pontot meg kell szerezni a legalább elégséges osztályzathoz. A választ a túloldalon is folytathatja, kérjük, hogy a fenti helyre írja rá a* **nevét** *és az* **ELTE-azonosítóját** *nyomtatott nagybetűkkel.*

31. **Mondjuk ki pontosan és igazoljuk a Lagrange tételének bizonyításában szereplő, két bal oldali mellékosztály metszetéről szóló állítást.** Lagrange tételét magát nem kell bizonyítani, sem kimondani.

OSZTÁLYZATOK: Amennyiben az első részre megvan a legalább $7+7$ *pont, középszintűeknek pedig a második részre a legalább* 3 *pont, akkor a végső osztályzatot az alábbi táblázat adja meg, ahol* S *a dolgozat összpontszáma.*

	Osztályzat
$S \leq 17$	2
$18 \leq S \leq 21$	3
$22 \leq S \leq 25$	4
$26 \leq S \leq 34$	5