

Bsc algebra2 alapszintű gyakorlat
Ötödik feladatsor (2009. március 31)

4.2.18. Mutassuk meg, hogy $(123) = (231)$, sőt általában egy ciklust bármelyik eleménél kezdve ugyanazt a permutációt kapjuk.

4.2.25, 4.3.31. Adjuk meg az alábbi hat permutáció ciklusfelbontását és előjelét.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{bmatrix}$$

$$(1234)(35)(1432)(35), \quad (12345)(234)(12345)^{-1}, \quad [(12)(23)(34)]^{1222}.$$

Tegyük meg ugyanezt az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz „hátról előre” permutációjával is.

4.2.23. Igazoljuk, hogy $(x_1 \dots x_k) = (x_1 x_2)(x_2 x_3) \dots (x_{k-2} x_{k-1})(x_{k-1} x_k)$.

4.2.26. Legyen $f = (12)(345)$. Hány különböző hatványa van ennek a permutációnak? Melyik a legkisebb hatványa, ami az egységelemet adja? Mely k és ℓ egészekre lesz $f^k = f^\ell$?

4.8.14. Mutassuk meg, hogy ha $(x_1 \dots x_k)$ egy ciklus az S_n csoportban, és $f \in S_n$, akkor $f \circ (x_1 \dots x_k) \circ f^{-1} = (f(x_1) \dots f(x_k))$.

4.1.15. Ha f és g transzformációk, milyen kapcsolatban állnak f és gfg^{-1} fixpontjai?

4.1.36. Tegyük föl, hogy f és g fölcserélhető transzformációk az X halmazon. Mutassuk meg, hogy f a g fixpontjainak halmazát önmagára képi.

4.1.37. Mikor fölcserélhető két egyenesre tükrözés a síkon?

4.1.23. Igazoljuk a $tft^{-1} = f^{-1}$ összefüggést, ahol t tengelyes tükrözés egy origón átmenő egyenesre, f pedig egy origó körüli forgatás.

Gyakorló feladatok

4.2.31*. Mely $f \in S_n$ permutációk cserélhetők föl az $(1, 2, \dots, n)$ ciklussal?

4.2.32*. Igazoljuk, hogy egy permutáció pontosan akkor hatványa egy ciklusnak, ha diszjunkt ciklusfelbontásában a ciklusok hossza azonos (az egyelemű ciklusokat nem írjuk ki).

4.2.34*. Mutassuk meg, hogy S_n valamennyi eleme előáll legfeljebb $n-1$ darab transzpozíció szorzataként. Van-e olyan elem, amihez $n-1$ transzpozíciónál kevesebb nem elegendő?

4.2.30*. Igazoljuk, hogy minden páros permutáció előáll hármasciklusok szorzataként.

4.1.16. Legyen r a $\overrightarrow{PP'}$ eltolás a síkon. Igazoljuk, hogy ha g tetszőleges egybevágóság, akkor grg^{-1} a $\overrightarrow{g(P)g(P')}$ eltolás.

4.1.17. Legyen t az e egyenesre való tükrözés. Igazoljuk, hogy ha g tetszőleges egybevágóság, akkor gtg^{-1} a $g(e)$ egyenesre való tükrözés.

4.1.18. Legyen f a P pont körüli α szögű forgatás a síkon. Igazoljuk, hogy ha g tetszőleges egybevágóság, akkor gfg^{-1} forgatás $g(P)$ körül, mégpedig α szöggel, ha g mozgás, és $-\alpha$ szöggel egyébként.

4.1.39*. A tér mely egybevágóságainak a négyzete az identitás?