Bsc algebra2 alapszintű gyakorlat

Negyedik feladatsor (2009. március 2-24)

1. *Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk determinánsát.*
a) *T a síkon az $y = x$ egyenesre való tükrözés.*
b) *F a síkon az origó körüli $+90$ fokos forgatás.*
c) *$T + F$, TF és FT.*
d) *A térben a z tengely körüli $+120$ fokos forgatás.*
e) *A térben az yz síkra való tükrözés, illetve vetítés.*
Számítsuk ki, hová viszi az $F+T$ transzformáció az (x, y) pontot. Lineárisan függetlenek-e a T, F, FT, TF transzformációk? Hány dimenziós alteret generálnak az F pozitív kitevőjű hatványai?

2. *Legyen M az $y = x$ egyenesre való függőleges irányú vetítés mátrixa. Adjunk meg olyan K és L nem nulla, kétszer kettes valós mátrixokat, melyekre $KM = 0 = ML$.*

3. *Álljon W a sík azon lineáris transzformációiból, amelyek az $(1, 1)$ pontot nullába viszik. Igazoljuk, hogy ez altér, és határozzuk meg a dimenzióját.*

4. *Igazoljuk lineáris transzformációkra az $A(B + C) = AB + AC$ disztributív szabályt.*

5. *Legyenek $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Im}(AB) \subseteq \mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Ker}(AB) \supseteq \mathrm{Ker}(B)$ és $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$. (Emlékeztető: $r(C) = \dim \mathrm{Im}(C)$).*

6. *Bizonyítsuk be, hogy ha A és B lineáris leképzések, melyekre $A + B$ értelmes, akkor $\mathrm{Im}(A + B) \subseteq \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$, és ezért $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$. Adjunk példát olyan esetre, amikor egyenlőség áll, és olyanra is, amikor nem.*

7. *Melyek azok a lineáris transzformációk a síkon, amelyek mindegyik lineáris transzformációval felcserélhetők? Általánítsuk a megoldást magasabb dimenzióra.*

---

8. *Határozzuk meg az $\{x^2 + 2x + 2,\ 2x^2 - 3x + 6,\ 3x^2 - 8x + 10\}$ polinomrendszer rangját.*

9. *Mely geometriai transzformációk tartoznak az alábbi mátrixokhoz? Adjuk meg a megfelelő transzformációk inverzét (ha létezik), és ezek mátrixait is.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IHF. *Legyen A a térben a z-tengely körüli 90 fokos forgatás, ami az x-tengelyt az y-tengelybe viszi, és B az a transzformáció, ami minden pontot tükröz a $(0, 0, 0)$ és $(1, 1, 1)$ pontokat összekötő egyenesre. Mi ezeknél az $(1, 2, 3)$ pont képe? Igaz-e, hogy $A \circ B = B \circ A$?*

---

10. *Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk, illetve mátrixok sajátértékeit, sajátaltereit, karakterisztikus polinomját, minimálpolinomját, és Jordan-alakját.*
a) *Az alábbi mátrixok $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ felett:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Melyek diagonalizálhatóak? Számítsuk ki az utolsó két mátrix n-edik hatványát.

b) *A vektortér a sík $\mathbb{R}$ felett, a transzformáció pedig az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges irányú vetítés; az origó körüli α szögű forgatás.*

IHF *A transzformáció a deriválás az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeinek vektorterén.*

11. *Legyen A egybevágósági transzformáció a térben, mely a P pontot helyben hagyja. Igazoljuk, hogy van olyan $Q \neq P$ pont, melyet A vagy helyben hagy, vagy P-re tükröz.*

12. *Milyen kapcsolatban állnak az M karakterisztikus polinomjának együtthatói M nyomával illetve determinánsával? Mutassuk meg, hogy ha M-nek n különböző sajátértéke van, akkor ezek összege az M nyoma, szorzatuk az M determinánsa.*

13. *Melyek igazak az alábbi állítások közül?*

a) *Ha λ sajátértéke A-nak, akkor λ^2 sajátértéke A^2-nek.*

b) *Ha λ^2 sajátértéke A^2-nek, akkor λ sajátértéke A-nak.*

c) *Ha 0 sajátértéke A^2-nek, akkor 0 sajátértéke A-nak.*

14. *Igazoljuk, hogy ha a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér k dimenziós, akkor λ legalább k-szoros gyöke a karakterisztikus polinomnak. Teljesül-e mindig az egyenlőség? Igaz-e, hogy a diagonalizálhatóság azzal ekvivalens, hogy a sajátalterek összege az egész tér?*

---

15. *Melyek azok a lineáris transzformációk a síkon, melyeknek minimálpolinomja elsőfokú? Melyek azok, amelyeknek a minimálpolinomja és a karakterisztikus polinomja különböző?*

16. *Határozzuk meg egy általános diagonális mátrix minimálpolinomját.*

17. *Oldjuk meg $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-ben az $X^4 = 2X$ egyenletet.*

18. *Adjuk meg az alábbi mátrixok Jordan-alakját.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 6 & 9 & -2 \\ 15 & 24 & -5 \end{pmatrix}$$

---

19. *A Fibonacci-sorozatot az $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ rekurzió definiálja.*

a) *Igazoljuk, hogy az $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ rekurziónak eleget tevő sorozatok alteret alkotnak a sorozatok vektorterében. Hány dimenziós ez az altér?*

b) *Keressünk ebben az altérben mértani sorozatokat.*

b) *Adjunk explicit képletet a Fibonacci-sorozat általános elemére mértani sorozatok lineáris kombinációja segítségével.*

20. *Bizonyítsuk be, hogy ha M komplex elemű mátrix, akkor $n \to \infty$ esetén M^n akkor és csak akkor tart nullához, ha M minden sajátértékének az abszolút értéke 1-nél kisebb.*

21*. *Igazoljuk, hogy egy $\mathbb{Q}^{n\times n}$-beli mátrix minimálpolinomja ugyanaz $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{C}$ felett.*

22*. *Legyen A egy $n \times n$-es nilpotens mátrix. Igazoljuk, hogy $A^n = 0$.*

23*. *Mutassuk meg, hogy egy komplex elemű négyzetes mátrix akkor és csak akkor nilpotens, ha minden hatványának nulla a nyoma. Az első hány hatványra kell ezt feltenni?*