

Bsc algebra2 alapszintű gyakorlat

Harmadik alkalom (2009. február 24)

1. Az alábbi $A : V_1 \rightarrow V_2$ leképezések közül melyek lineárisak? Ahol a válasz igenlő, ott adjuk meg a leképezés mátrixát a szokásos, illetve a megadott bázis(pár)ban, határozzuk meg a kép- és magterét, és ellenőrizzük a dimenziótétel állítását.

- V_1 és V_2 a sík \mathbb{R} felett, A egy eltolás; egy pont körüli forgatás; egy egyenesre (pontra) való tükrözés; egy egyenesre való vetítés. A mátrixot csak az origó körüli α szögű forgatás; az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges vetítésre számítsuk ki, a szokásos, illetve a $b_1 = (1, 1)$, $b_2 = (-1, 1)$ bázisban.
- $V_1 = \mathbb{R}$ az \mathbb{R} felett, $V_2 = \mathbb{C}$ a \mathbb{C} felett, A az $1 + i$ számmal való szorzás.
- $V_1 = V_2 = \mathbb{C}$ az \mathbb{R} felett, A az $1 + i$ számmal való szorzás.
- $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}$ az \mathbb{R} felett, $A(v)$ a v komponenseinek az összege.
- $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ az \mathbb{R} felett, A a transzponálás (azaz a főátlóra való tükrözés).
- $V_1 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb harmadfokú elemei, $V_2 = \mathbb{C}$ az \mathbb{R} felett, $A(f) = f(i)$.
- $V_1 = V_2 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb n -edfokú elemei az \mathbb{R} felett, $A(f) = f'$ (derivált).

2. Ha egy lineáris transzformáció mátrixa egy adott bázisban M , mi lesz a mátrix akkor, ha mindegyik bázisvektort (csak az első bázisvektort) a kétszeresére növeljük? Mely lineáris transzformációknak lesz minden bázisban ugyanaz a mátrixa?

3. Legyen W a V véges dimenziós vektortér tetszőleges altere. Bizonyítsuk be, hogy V -nek létezik olyan lineáris transzformációja, amelynek W a magtere, illetve a képtere.

4. Legyen V véges dimenziós vektortér, $A : V \rightarrow V$ pedig egy lineáris transzformáció. Ha $\text{Im}(A^2) = \text{Im}(A)$, következik-e ebből, hogy $\text{Ker}(A^2) = \text{Ker}(A)$? Igaz-e a megfordítás?

IHF. Az A transzformáció mátrixa a sík szokásos bázisában $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Adjuk meg a bázistranszformáció képletét felhasználva az A mátrixát az $(1, 1)$, $(1, 2)$ bázisban, és az $b_1 = (1, 1)/\sqrt{2}$, $b_2 = (-1, 1)/\sqrt{2}$ bázisban is.

5. Az alábbi M mátrixok esetében határozzuk meg a $v \mapsto Mv$ leképezés mag- és képterét, valamint rangját.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Mutassuk meg, hogy ha A idempotens lineáris transzformáció a V vektortéren, azaz $A^2 = A$, akkor $\text{Im}(A) \oplus \text{Ker}(A) = V$. Igazoljuk, hogy a sík egy lineáris transzformációja akkor és csak akkor idempotens, ha nulla, az identitás, vagy egy origón átmenő egyenesre való (nem feltétlenül merőleges) vetítés.

7. Egy A lineáris transzformáció nilpotens, ha van olyan n pozitív egész, hogy $A^n = 0$. Bizonyítsuk be, hogy ha az A és B nilpotens, lineáris transzformációk felcserélhetők (azaz $AB = BA$), akkor $A + B$ is nilpotens. Elhagyható-e a felcserélhetőség feltétele?

További gyakorlásul a Freud-könyv negyedik és ötödik fejezetének feladatait javaslom, leginkább ezeket: 4.2.7, 4.2.12, 5.1.15, 5.3.4, 5.4.3, 5.6.19, 5.7.7, 5.7.8, 5.8.3, 5.8.7.