Bsc algebra1 emelt szintű gyakorlat

Második zárthelyi (2009. december 4.) — eredmények

1. Legyen a maradék $r(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, ekkor a, b, c, d valós (1 pont). Az $r(i) = 1$ egyenletből $b = d$ és $a - c = 1$ (1 pont). Az $f(x) = (x^2 + 1)^2 q(x) + r(x)$ egyenlőséget deriválva, majd i-t helyettesítve $r'(i) = 2$ (2 pont). Az egyenletrendszert megoldva $r(x) = 1 - x - x^3$ (2 pont).

2. A kilencedik primitív egységgyökök összege nulla hiszen Φ_9-ben nem szerepel x^8 (1 pont). Rögzített j esetén ε_j^3 együtthatója a primitív kilencedik egységgyökök összege, kivéve magát ε_j-t. Ezért ez az együttható $-\varepsilon_j$, és a keresett összeg $-\sum \varepsilon_j^4$ (2 pont). Mivel $(4, 9) = 1$, ezért ε_j^4 rendje is 9, és ezek a hatványok páronként különbözők, mert ha $\varepsilon_j^4 = \varepsilon_k^4$, akkor $\varepsilon_j/\varepsilon_k$ csak 1 lehet, hiszen rendje 4-nek és 9-nek is osztója (2 pont). Ezért a végeredmény -0 (1 pont). *Második megoldás:* A gyakorlaton tanult algoritmusból kapjuk, hogy $\sum x_i^3 x_j$ alaptétel szerinti felírásában a következő tagok szerepelhetnek: σ_4, $\sigma_1\sigma_3$, σ_2^2, $\sigma_1^2\sigma_2$ (3 pont). A Φ_9 együtthatóiból látjuk, hogy $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_4 = 0$, ezért az eredmény is nulla (3 pont). (Az eredmény $4\sigma_4 - \sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2^2 + \sigma_1^2\sigma_2$, de ezt fölösleges kiszámolni.)

3. A racionális gyökteszt alapján a -1 gyök, ezért a polinom a következő szorzatra bomlik fel: $(x + 1)(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 4)$ (2 pont). Itt a második tényező is irreducibilis, mert $(x - 1)^4 + 3$ alakban írható, és így eltoltjára alkalmazható a Schönemann–Eisenstein-kritérium (4 pont).

4. Mivel a polinomnak nincs gyöke $\mathbb{Z}_2$-ben, ezért ha nem irreducibilis, akkor van másod- vagy harmadfokú irreducibilis osztója. Ezek $\mathbb{Z}_2$ fölött $x^2 + x + 1$, $x^3 + x + 1$ és $x^3 + x^2 + 1$ lehetnek csak (2 pont). De a felsorolt polinomok egyikével sem osztható, ezért irreducibilis $\mathbb{Z}_2$ fölött (4 pont).

5. Például $(x - 1)^{20} + (x - 1)^6$ megfelel $\mathbb{Z}_3$ fölött.

6. Osszuk el a polinomot a legnagyobb x-hatvánnyal, amivel osztható, ez a nem nulla gyökök multiplicitását nem változtatja meg. Deriváljunk, ekkor minden multiplicitás eggyel csökken, és pontosan eggyel csökken a tagok száma is. Ha $n - 1$ ilyen lépést hajtunk végre, akkor csak egy tag marad, aminek már nincs nem nulla gyöke. Ezért a maximális multiplicitás nem lehet több $n - 1$-nél (5 pont). Ez meg is valósul például $(x - 1)^{n-1}$ esetében (1 pont).

7. A feltételből következik, hogy ha $z \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor $f(x^2)$-nek is, azaz z^2 is gyöke f-nek (1 pont). Mivel f nem nulla, ezért csak véges sok gyöke van, így $z^{2^k} = z^{2^\ell}$ alkalmas $k < \ell$-re. Így z vagy egységgyök vagy nulla (2 pont). Ha $z = 0$, akkor $f(x) = \pm x$, ami nyilván megfelelő (1 pont). Ha $o(z) = n$, akkor $f(x) = \pm\Phi_n(x)$ (1 pont). Ez akkor lesz megfelelő, ha n páratlan. Valóban, ha n páros, akkor $\Phi_n(x^2) = \Phi_{2n}(x)$, ami irreducibilis, és így $\Phi_n(x)$ nem osztója. Ha viszont n páratlan, akkor a hatvány rendjének képlete miatt $o(z^2) = o(z) = n$, ezért Φ_n mindegyik gyöke gyöke $\Phi_n(x^2)$-nek is. Ezek mind egyszeresek, ezért $\pm\Phi_n$ tényleg megfelelő (1 pont). (Valójában páratlan n esetén $\Phi_n(x^2) = \pm\Phi_n(x)\Phi_n(-x)$ a 3.9.21. Feladat szerint.)

Extra kérdés. Ha f-ről nem tesszük föl, hogy irreducibilis, akkor továbbra is teljesül, hogy minden gyöke egységgyök vagy nulla, ezért f körosztási polinomoknak és x egy hatványának a szorzata. Egy ilyen f akkor lesz megfelelő, ha kanonikus alakjában Φ_m kitevője legalább akkora, mint Φ_{2m} kitevője minden m esetén.