**Bsc algebra1 emelt szintű gyakorlat**

*Első zárthelyi (2009. október 16.) — eredmények*

**1.** A $j+i$ szöge $\alpha_j$ (3 pont), ezért $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ az $(1+i)(2+i)(3+i)=10i$ szöge (2 pont), vagyis $\pi/2$ (1 pont).

**2.** Ha $z$ rendje végtelen, akkor $\varepsilon z$ rendje is az, tehát ez megfelel a feladat feltételeinek (1 pont). Belátjuk, hogy ezen kívül a kilenccel osztható rendű számok felelnek meg. Legyen $o(z)=n<\infty$. Ha $z$ megfelelő, akkor $(\varepsilon z)^n=1$, tehát $n=3m$ alkalmas egészre (1 pont). Ekkor $\eta=z^m$ primitív harmadik egységgyök, és $(\eta^j z)^m=\eta^{mj+1}$. Ha $m$ nem osztható hárommal, akkor $3\mid mj+1$ elérhető a $j=1$ vagy $j=2$ választással, tehát ekkor $z$ nem megfelelő (2 pont). Tegyük föl, hogy $3\mid m$ és $o(\varepsilon z)=k$. Ahhoz, hogy $z$ megfelelő, be kell látni, hogy $k=n=3m$. Nyilván $(\varepsilon z)^{3m}=1$ miatt $k\mid 3m$, továbbá $(\varepsilon z)^k=1$-ből köbre emeléssel $z^{3k}=1$, azaz $m\mid k$. Tehát csak az $m=k$ esetet kell kizárni. De ha $(\varepsilon z)^m=1$ lenne, akkor $3\mid m$ miatt $z^m=1$ is fennállna (2 pont).

**3.** Az $X^2-\mathrm{tr}(X)X+\det(X)E=0$ összefüggést használjuk. Legyen $d=\det(M)$ és $t=\mathrm{tr}(M)$. A szorzástétel miatt $\det(M^n)=d^n$, ezért a feltétel szerint $n\in\{2009,2010\}$ esetén $M^{2n}=-d^nE$. Az első egyenletet $M^2$-tel szorozva $-d^{2010}E=-d^{2009}M^2$. Ha $d\neq 0$, akkor innen $M^2=dE$, de akkor $M^{2010}=d^{1005}E$, aminek a nyoma $2d^{1005}\neq 0$. Ez ellentmondás, így $d=0$ (3 pont). Ekkor viszont $M^2=tM$ miatt $M^n=t^{n-1}M$. Mivel $M^{2\cdot 2010}$ most nulla, innen $t=0$ vagy $M=0$, de ekkor ismét $t=0$ (3 pont). (Valójában $M^2=0$ is kijött.)

**4.** $r+s=(r+s)^2=rs+sr$. Balról $r$-rel szorozva $rs=rsr$, jobbról szorozva $sr=rsr$. Tehát $rs=sr$, de akkor $rs=rsr=r^2s=0$, és hasonlóan $sr=0$. Tehát $r+s=rs+sr=0$.

**5.** $(123456789)=(12)(23)(34)(45)(56)(67)(78)(89)$ (1 pont). Mivel $(ab)(bc)=(abc)$, ezért az eredmény $(123)(345)(567)(789)$ (5 pont).

**6.** Legyen $K$ az a $2n\times 2n$-es mátrix, amelynek főátlója végig 1, mellékátlójában (ami a főátlóra merőleges) a főátló alatt $-1$, fölötte 1 van, a $K$ többi eleme pedig nulla. Nyilván $N=MK$ (3 pont). A $K$ determinánsa $2^n$ (adjuk hozzá az $i$-edik sort a $2n+1-i$-edikhez, ahol $1\le i\le n$, és akkor háromszögmátrixot kapunk). Ezért $\det(N)=2^nd$ (3 pont).

**7.** Azonosítsuk $(a,0)$-t $a$-val, mint a komplex számok bevezetésekor, ezek nyilván $T$-vel izomorf résztestet alkotnak, és legyen $\varepsilon=(0,1)$. Ekkor $\varepsilon^2=-\varepsilon-1$ (1 pont), és így $\varepsilon^3=1$. Az $a+b\varepsilon$ inverzének kiszámításakor a törtet $a+b\varepsilon^2$-tel bővítve a nevezőben $(a+b\varepsilon)(a+b\varepsilon^2)=a^2-ab+b^2$ keletkezik. Mivel $\mathbb{Z}_{31}$-ben $6^2-6+1=0$, ezért itt $(6+\varepsilon)(6+\varepsilon^2)=0$, vagyis a nullosztómentesség sérül, nem kapunk testet (3 pont). $\mathbb{Z}_2$ esetében testet kapunk, mert $a^2-ab+b^2$ páratlan, kivéve ha $a,b$ páros (2 pont). Ez közvetlenül is ellenőrizhető, hiszen az elemek $0,1,\varepsilon,\varepsilon^2$, és itt $\varepsilon$ és $\varepsilon^2$ egymás inverzei.

A $\mathbb{Z}_p$ fölött az $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ azonosság miatt akkor és csak akkor kapunk testet, ha $p-1$ nem osztható 3-mal (mert ekkor oldható meg nemtriviálisan az $x^3\equiv 1$ $(p)$ kongruencia).