

Bsc algebra1 emelt szintű gyakorlat

Második zárthelyi (2009. december 4.)

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges**, a pusztán eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. A feladatok nincsenek nehézségi sorrendben. Minden feladat megoldását külön lapra írjátok. Használni csak egy lapnyi **kézzel írott** puskát lehet, kalkulátort, mobiltelefont viszont nem. Minden lapon szerepeljen a szerző neve, és legalább egy lapon az ELTE-azonosítója, illetve gyakorlatvezető neve, **OLVASHATÓ NYOMTATOTT NAGYBETŰKKEL**.

1. Az $f \in \mathbb{R}[x]$ polinom $x^2 + 1$ -gyel osztva 1-et, a deriváltja $x^2 + 1$ -gyel osztva 2-t ad maradékul. Mennyit ad maradékul az f polinom $(x^2 + 1)^2$ -nel osztva?
2. Határozzuk meg a $\sum_{j \neq k} \varepsilon_j^3 \varepsilon_k$ összeget, ahol ε_j és ε_k függetlenül befutja a primitív kilencedik egységgyököket.
3. Bontsuk \mathbb{Q} fölött irreducibilisek szorzatára az $x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4$ polinomot.
4. Bontsuk $x^6 + x + 1$ -et \mathbb{Z}_2 fölött irreducibilisek szorzatára.
5. Adjunk meg alkalmas test fölött egy olyan polinomot, amelynek az 1 (pontosan) hat-szoros, a deriváltjának pedig (pontosan) tizenkilencszeres gyöke.
6. Az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak n darab nem nulla tagja van. Legfeljebb mekkora lehet egy nem nulla komplex gyökének a multiplicitása?
7. Mely $f \in \mathbb{Z}[x]$ irreducibilis polinomokra osztható $f(x)$ -szel $f(x^2)$?

Extra kérdés. Mi a válasz az előző feladatban, ha f irreducibilitását nem tesszük föl?