Bsc algebra1 emelt szintű gyakorlat

Első zárthelyi (2009. október 16.)

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. A feladatok nincsenek nehézségi sorrendben. Minden feladat megoldását külön lapra írjátok. Használni csak egy lapnyi **kézzel írott** puskát lehet, kalkulátort, mobiltelefont viszont nem. Minden lapon szerepeljen a szerző neve, és legalább egy lapon az ELTE-azonosítója, illetve gyakorlatvezető neve, **OLVASHATÓ NYOMTATOTT NAGYBETŰKKEL**.

1. *Legyen α_j az a szög 0 és $\pi/2$ között, melynek tangense $1/j$. Mennyi $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$?*

2. *Mely $0 \neq z \in \mathbb{C}$ esetén lesz z és εz rendje egyenlő tetszőleges ε primitív harmadik egységgyök esetén?*

3. *Az $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mátrixra M^{2009} és M^{2010} nyoma is nulla. Következik-e ebből, hogy M nyoma nulla?*

4. *Legyen R (nemkommutatív) gyűrű, és $r, s \in R$. Tegyük föl, hogy $(r+s)^2 = r+s$. Ha $r^2 = s^2 = 0$, akkor következik-e ebből, hogy $r+s=0$?*

5. *Írjuk föl az* (123456789) *ciklust hármasciklusok szorzataként.*

6. *Legyen $M = ((m_{i,j})) \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ és $N = ((n_{i,j}))$, ahol $n_{i,j} = m_{i,j} - e m_{i,2n+1-j}$, ahol $e = 1$ ha $j \leq n$, és $e = -1$ egyébként. Ha $\det(M) = d$, akkor mennyi $\det(N)$? Aki csak $n = 2$-re oldja meg, 3 pontot kap.*

7. *A T testbeli párok halmazán értelmezzük a műveleteket az $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ és $(a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc-bd)$ képlettel. Így gyűrűt kapunk (ezt nem kell belátni). Test lesz-e ez, ha $T = \mathbb{Z}_2$, illetve $T = \mathbb{Z}_{31}$?*

Extra kérdés. *Az előző feladatban mely p prímekre kapunk testet $T = \mathbb{Z}_p$ esetén?*