Bsc algebra1 emelt szintű gyakorlat

Kilencedik feladatsor (2009. november 10–11)

3.1.2. *Határozzuk meg az* x^2+1 *polinom felbontásait* $\mathbb{Z}_2[x]$*-ben és* $\mathbb{Z}_3[x]$*-ben.*

3.1.29. *Igaz-e a* $2x \mid 3x^2$ *oszthatóság rendre a* $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ *fölötti polinomok gyűrűjében?*

3.1.32. *Legyen* R *az* $a+bi$ *alakú számok gyűrűje a komplex számok szokásos összeadására és szorzására, ahol* $a, b \in \mathbb{Z}$*. Határozzuk meg 2-nek és* $1+3i$*-nek az összes kitüntetett közös osztóját* R*-ben.*

3.1.34. *Legyen* R *az* $a+bi\sqrt{5}$ *alakú számok részgyűrűje* $\mathbb{C}$*-ben, ahol* $a, b \in \mathbb{Z}$*.*
a) Igazoljuk, hogy a 3 ebben a gyűrűben felbonthatatlan, de nem prím.
b) Létezik-e R*-ben 9-nek és* $3(2+i\sqrt{5})$*-nek kitüntetett közös osztója?*

3.2.4. *Igazoljuk, hogy* $\mathbb{Z}[x]$*-ben a 2 és* x *elemeknek az 1 kitüntetett közös osztója, de nem írható föl* $2p(x)+xq(x)$ *alakban, ahol* $p, q \in \mathbb{Z}[x]$*.*

3.2.16. *Osszuk el az* x^3-2 *polinomot* $2x^2+2x-3$*-mal.*

3.2.17, 3.3.15. *Az alábbi* f *és* g *polinomoknak határozzuk meg a kitüntetett közös osztóját az euklideszi algoritmussal, és az eredményt a visszahelyettesítési eljárással írjuk föl* $fp+gq$ *alakban, ahol* p *és* q *alkalmas polinomok.*
a) $f(x)=3x^3+6x^2+6x+3$ *és* $g(x)=2x^4+2x^2+2$*.*
b) $f(x)=x^5-1$ *és* $g(x)=x^3-1$*.*
Mi az x^n-1 *és* x^m-1 *polinomok kitüntetett közös osztója?*

3.2.23. *Ha az* x^4+x^2+1 *polinomot elosztjuk* x^2+x+1*-gyel, mi a maradék? A kapott eredményt indokoljuk meg számolás nélkül is. Általánosítsunk!*

3.2.24. *Mi a maradék, ha* $x^{64}+x^{54}+x^{14}+1$*-et osztjuk* x^2-1*-gyel, illetve* x^2+1*-gyel?*

3.2.25. *Egy* $f \in \mathbb{C}[x]$ *polinom* $x-1$*-gyel osztva kettőt,* $x-2$*-vel osztva egyet ad maradékul. Mit ad maradékul* $(x-1)(x-2)$*-vel osztva?*

3.3.13. *Bontsuk föl a következő polinomokat az* $\mathbb{R}$ *fölött irreducibilis polinomok szorzatára:* x^4-1, x^4+1, x^4+9, x^6-4x^3+3*.*

3.3.14. *Bontsuk föl* $6(x^2-2)(x^2+1)$*-et* $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ *fölött felbonthatatlanok szorzatára.*

3.3.16. *Mely tizenkettedfokú valós együtthatós polinomoknak hatszoros gyöke* $1+i$*?*

3.3.17. *Bontsuk* $2x^3+3x+5$*-öt* $\mathbb{Q}$ *fölött irreducibilisek szorzatára.*

3.3.18*. *Legyen* $f \in \mathbb{Z}[x]$ *egy* n*-edfokú polinom, melyre* $f(0) \neq 0$*. Mutassuk meg tetszőleges rögzített* $0 < j < n$ *esetén, hogy létezik legalább egy, de csak véges sok olyan* m *egész, hogy az* $f(x)+mx^j$ *polinomnak van racionális gyöke.*

3.3.19. *Legyen* c *pozitív egész szám. Mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy* x^4+c *irreducibilis legyen* $\mathbb{Q}$ *fölött? Mi a helyzet negatív* c *esetén?*

3.3.20. *Van-e végtelen sok olyan pozitív egész* c*, amelyre* n^4+c *minden* n *egészre összetett?*

3.3.21. *Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_2$ test fölött a legfeljebb negyedfokú irreducibilis polinomokat.*

3.3.22. *Igazoljuk, hogy tetszőleges $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinomra $f(x^p) = f(x)^p$.*

3.3.23. *Bontsuk irreducibilisek szorzatára az alábbi polinomokat.*
a) $\mathbb{Z}_2$ *fölött* $x^8 + x^2 + 1$, $x^5 + x + 1$, $x^5 + x^3 + 1$, $x^5 + x^4 + x^3 + 1$.
b) $\mathbb{Z}_{17}$ *fölött* $x^2 + 1$, $x^4 + 1$, $x^8 + 1$, $x^{17} + 1$, $x^{17} + 2$.

3.3.24. *Bontsuk $x^4 - 10x^2 + 1$-et $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{11}$ fölött felbonthatatlanok szorzatára.*

3.1.6. *Igazoljuk, hogy ha $r \in R$ kommutatív, egységelemes gyűrű, akkor $p \in R[x]$ pontosan akkor osztható ($R[x]$-ben) r-rel, ha minden együtthatója osztható (R-ben) r-rel.*

3.1.17. *Mely negatív egészek írhatók fel prímhatványok szorzataként?*

3.1.24. *Legyen R szokásos gyűrű, amelyben bármely két elemnek van kitüntetett közös osztója. Igazoljuk, hogy ha $r \mid st$ és $(r, s) \sim 1$, akkor $r \mid t$.*

3.1.27. *Legyen R szokásos gyűrű, amelyben bármely két elemnek létezik kitüntetett közös osztója. Igazoljuk, hogy R minden felbonthatatlan eleme prím.*

3.1.28*. *Legyen R szokásos gyűrű, amelyben mindegyik felbonthatatlan elem prím. Mutassuk meg, hogy R-ben érvényes a számelmélet alaptételének egyértelműségi állítása.*

3.1.31. *Igazoljuk, hogy alaptételes gyűrűben $(r, s)[r, s] \sim rs$.*

3.1.35. *Tekintsük az $\mathbb{R}[x, y]$ polinomgyűrű azon elemeit, amelyekben minden nem konstans tag legalább másodfokú, de nem szerepel xy-os tag. Mutassuk meg, hogy ezek részgyűrűt alkotnak, amelyben nincs bármely két elemnek kitüntetett közös osztója.*

3.1.36. *Legyen R azoknak a valós együtthatós „polinomoknak” a halmaza, amelyekben az x határozatlan kitevői nemcsak nemnegatív egész számok, hanem tetszőleges nemnegatív valós számok lehetnek. Mutassuk meg, hogy R szokásos gyűrű a szokásos műveletekre, amelyben x nem bontható föl felbonthatatlanok szorzatára.*

3.2.6. *Igazoljuk, hogy két racionális együtthatós polinom $\mathbb{Q}[x]$-beli kitüntetett közös osztója $\mathbb{C}[x]$-ben is kitüntetett közös osztó. Általánosítsunk!*

3.2.18. *Elvégezhető-e $\mathbb{Z}[x]$-ben az $x : 2$ maradékos osztás?*

3.2.19. *Legyenek f és $g \neq 0$ egész együtthatós polinomok. Igaz-e, hogy g akkor és csak akkor osztója f-nek $\mathbb{Z}[x]$-ben, ha az $f : g$ maradékos osztást $\mathbb{Q}[x]$-ben elvégezve a hányados egész együtthatós, és a maradék nulla?*

3.2.20. *Legyen T test, S részgyűrűje T-nek, $f, g \in S[x]$, és g főegyütthatója invertálható S-ben. Igazoljuk, hogy ha g osztója f-nek $T[x]$-ben, akkor osztója $S[x]$-ben is.*

3.2.21. *Legyen T test, és S résztestе T-nek. Tegyük föl, hogy $f, g \in S[x]$, e két polinomnak $b \in T$ közös gyöke, és g irreducibilis S fölött. Mutassuk meg, hogy $g \mid f$ az $S[x]$-ben.*

3.2.26. *Ha b közös gyöke az f és g (szokásos gyűrű fölötti) polinomoknak, és h kitüntetett közös osztója f-nek és g-nek, akkor mi lesz a b gyök multiplicitása h-ban?*

1*. *Legyen f egy n-változós polinom a T test fölött, melynek (egyik) legmagasabb fokú (nem nulla) tagja $cx_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$. Igazoljuk, hogy f nem lehet azonosan nulla egy olyan $S_1 \times \ldots \times S_n \subseteq T^n$ halmazon, melyre S_i elemszáma nagyobb, mint m_i (minden i-re).*