Bsc algebra1 emelt szintű gyakorlat

Nyolcadik feladatsor (2009 nov. 3–4)

2.6.8. *A* $p = ix_1x_2x_3x_4^2 - x_1^2x_3^3 + 3x_1^3x_2 + \pi x_1^2x_2^3 + x_4 - x_1^2x_2^2x_3 + 2x_1^2x_2x_3x_4 - 6x_1^2x_2^2x_4$ *polinomot bontsuk föl homogén polinomok összegére, ezeket rendezzük lexikografikusan, és állapítsuk meg a* p^7 *polinomban egyrészt a lexikografikusan legnagyobb tagot, másrészt a legnagyobb fokú tagok közül a lexikografikusan legnagyobb tagot.*

2.7.12. *Ha egy három határozatlanú szimmetrikus polinom lexikografikusan legnagyobb tagja* $x_1^2x_2^2x_3$*, akkor lehet-e tagja* $x_1x_2^3x_3$*? Szerepelhet-e hatodfokú tag? Hány tag lehet legfeljebb? Amikor elemi szimmetrikusakkal írjuk föl, mi az eljárás első lépése?*

2.7.6. *Legyen* $H(y_1, y_2, y_3) = 30y_1y_3^3 - y_2^5$*. Helyettesítsük be mindegyik* y_i *helyére a megfelelő* $\sigma_i(x_1, x_2, x_3)$ *polinomot, és adjuk meg az eredmény egy nem nulla tagját.*

2.7.13. *A fenti 2.6.8. Gyakorlatban szereplő* p *polinomban helyettesítsük be mindegyik* x_i *helyére a négy határozatlanú* σ_i *elemi szimmetrikus polinomot, és adjuk meg az eredménynek egy olyan tagját, amelynek nem nulla az együtthatója.*

2.7.17. *Legyen* $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ *egy homogén* k*-adfokú szimmetrikus polinom, melyben minden határozatlan legfeljebb az* m*-edik hatványon szerepel. Mutassuk meg, hogy ha* $\sigma_1^{k_1} \dots \sigma_n^{k_n}$ *nem nulla együtthatóval szerepel az* f*-nek az elemi szimmetrikus polinomokkal való fölírásában, akkor* $k_1 + k_2 + \dots + k_n \le m$ *és* $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = k$*. Hogyan segítenek ezek a képletek az* f *polinom elemi szimmetrikus polinomokkal való előállításában?*

2.7.19. *Mutassuk meg, hogy nem létezik végtelen sok olyan egytagú* $P_1, P_2, \dots$ *polinom* $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$*-ben, melyekre* $P_1 \succ P_2 \succ \dots$ *teljesül.*

2.6.11. *Általánosítsuk az interpolációt többhatározatlanú polinomokra. Mutassuk meg, hogy véges test esetében minden véges sok változós függvény polinomfüggvény.*

2.5.13. *Fejezzük ki az* $s_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ *négyzetösszeget az elemi szimmetrikus polinomok segítségével.*

2.5.14. *Számítsuk ki a* $2x^4 + 2x + 3$ *polinom négy komplex gyökének összegét, szorzatát, négyzetösszegét, valamint e gyökök reciprokainak összegét.*

2.7.14. *Fejezzük ki elemi szimmetrikus polinomokkal a* $\sum_{1 \le i \ne j \le n} x_i^2x_j$ *polinomot.*

2.7.15. *Határozzuk meg az* $x^n + x + 1$ *polinom (komplex) gyökeinek köbösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét* $(n \ge 2)$*.*

2.7.16. *Legyenek* a, b, c *az* $x^3 + 3x + 1$ *polinom gyökei. Írjuk föl azt a két harmadfokú normált polinomot, melynek gyökei* a^2, b^2, c^2*, illetve* $a + b$*,* $a + c$*,* $b + c$*.*

2.7.18*. *Legyen* f *egy egész együtthatós, normált polinom, melynek mindegyik komplex gyöke 1 abszolút értékű. Igazoljuk, hogy* f *mindegyik gyöke komplex egységgyök.*

2.6.10. *Igaz-e végtelen, szokásos gyűrű fölött a többváltozós polinomok azonossági tétele (vagyis hogy a polinomfüggvény egyértelműen meghatározza a polinomot)?*

1.** *A* G *egyszerű gráfban minden pont foka 4. Van-e mindig olyan részgráfja, ahol minden pont foka 3?*