Bsc algebra1 emelt szintű gyakorlat

Hetedik feladatsor (2009 okt. 20–21)

Gyakorló feladatok

2.1.9. *Végezzük el az alábbi műveletet a komplex együtthatós polinomok körében, és állapítsuk meg az eredmény fokát:* $(x^2 + ix + 3)(x^2 + i)$.

2.3.5. *Részgyűrűt alkotnak-e*
 a) $\mathbb{C}[x]$ *páros fokú elemei és a 0 a* $\mathbb{C}[x]$*-ben?*
 b) $\mathbb{R}[x]$ *legalább huszadfokú elemei és a 0 az* $\mathbb{R}[x]$*-ben?*

2.4.15. *A Horner elrendezéssel döntsük el, hogy a 2 gyöke-e az* $f(x) = x^6 - 4x^4 + x^3 - x^2 + 4$ *polinomnak, és írjuk is föl* $f(x)$*-et* $(x-2)g(x) + f(2)$ *alakban.*

2.4.4. *Mutassuk meg, hogy a Horner-elrendezés tényleg az* $f(b)$ *értéket számítja ki. Igazoljuk az alábbi összefüggést:*

$$f(x) = (x-b)(c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots + c_1x + c_0) + f^*(b)\,,$$

ahol $f(x) = a_nx^n + \ldots + a_0$, *és* $c_{n-1}, \ldots, c_0$ *a táblázatban kiszámított értékek.*

2.4.16. *Az* n*-edfokú* $f(x)$ *polinomba behelyettesítjük a* b *számot. Hány szorzásra van szükség* $f(b)$ *kiszámításához, ha*
 a) *egyáltalán nem trükközünk;*
 b) *a* b *hatványait előre kiszámoljuk;*
 c) *a Horner-elrendezést használjuk?*

2.5.17. *Értelmezhető-e egy polinomfüggvény gyökeinek a multiplicitása?*

2.4.9. *Igazoljuk, hogy ha* R *nullosztómentes gyűrű, akkor minden nem konstans* $f \in R[x]$ *polinom minden* $c \in R$ *értéket csak véges sok* R*-beli helyen vehet föl.*

2.4.19. *Mely* m*-ekre van* $\mathbb{Z}_m[x]$*-ben olyan polinom, melynek több gyöke van, mint a foka?*

2.4.18. *Igazoljuk, hogy ha* R *szokásos gyűrű és* $b \in R$, *akkor minden* $f \in R[x]$ *polinom egyértelműen fölírható* $x - b$ *polinomjaként, melynek foka ugyanaz, mint az* f *foka.*

2.4.13. *Ha az* f *polinom foka legfeljebb* $n-2$, *és* $f(a_j) = b_j$, *ha* $j = 1, 2, \ldots, n-1$, *akkor*
 a) *mi az általános alakja az olyan* $n-1$*-edfokú* g *polinomoknak, melyekre* $(f+g)(a_j) = b_j$ *minden* $j = 1, 2, \ldots, n-1$ *esetén?*
 b) *Hogyan kell* g*-t megválasztani, hogy* $(f+g)(a_n) = b_n$ *is teljesüljön?*

2.5.7. *Számítsuk ki* x *alábbi két polinomjának az együtthatóit:* $(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)$, *illetve* $(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)(x-b_4)$.

2.5.10. *Írjuk föl az* $x^4 + 4 \in \mathbb{C}[x]$ *polinomot gyöktényezős alakban, és ellenőrizzük beszorzással az eredményt. Bontsuk a polinomot valós együtthatós polinomok szorzatára.*

2.5.11. *Hányszoros gyöke* $x^4 - x^3 - x + 1$*-nek az 1? A Horner-elrendezést használjuk.*

2.5.12. *Legyen* R *szokásos gyűrű. Mutassuk meg, hogy ha két* n*-edfokú* $R[x]$*-beli polinom* n *darab* R*-beli helyen megegyezik (vagyis a két polinom ugyanazt az értéket veszi föl), és a főegyütthatóik egyenlők, akkor a polinomok is egyenlők.*

2.5.15. *Legyenek $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ az összes n-edik egységgyökök.*

a) *Bontsuk gyöktényezős alakra az $x^4 - 1$ polinomot.*

b) *Bizonyítsuk be, hogy $x^n - 1 = (x - \varepsilon_1) \dots (x - \varepsilon_n)$.*

c) *A gyökök és együtthatók összefüggése alapján is számítsuk ki az n-edik egységgyökök összegét, négyzetösszegét és szorzatát.*

d) *Az egységsugarú körbe írt szabályos n-szög egyik csúcsából a többi csúcsba húzott szakaszok hosszát összeszoroztuk. Mennyi az eredmény?*

Nehezebb feladatok

2.4.20. *Van-e olyan $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom, melyre $f(10) = 400$, $f(14) = 440$ és $f(18) = 520$?*

2.4.21. *Tegyük föl, hogy n egész alapponthoz keresünk interpolációs polinomot, és az itt felvett értékek maguk is egészek, de a kapott legfeljebb $n-1$-edfokú interpolációs polinom mégsem egész együtthatós. Lehetséges-e, hogy az interpoláció egy magasabb fokú, de egész együtthatós polinommal is elvégezhető?*

2.4.22. *Tegyük föl, hogy az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom minden racionális helyen racionális értéket vesz föl. Következik-e ebből, hogy f racionális együtthatós? Igaz-e az állítás, ha „racionális" helyett mindenütt „egész" szerepel?*

2.4.23. *Tegyük föl, hogy az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomhoz létezik olyan r valós szám, hogy az r-nél nagyobb egész helyeken f egész értéket vesz föl. Igazoljuk, hogy akkor f minden egész helyen egész értéket vesz föl.*

2.4.24. *Tegyük föl, hogy az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom foka n, és $n+1$ egymást követő egész helyen egész értéket vesz föl. Igazoljuk, hogy léteznek olyan $c_0, \dots, c_n$ egész számok, hogy*

$$f(x) = c_n \binom{x}{n} + \dots + c_0 \binom{x}{0}, \quad \text{ahol} \quad \binom{x}{j} = \frac{x(x-1)\dots(x-j+1)}{j!}.$$

(Így ha az n-edfokú f polinom $n+1$ egymást követő egész helyen egész értéket vesz föl, akkor minden egész helyen egész értéket vesz föl, ami az előző feladatot élesíti.)

2.4.25. *Legyen $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ az a lehető legalacsonyabb fokú polinom, amelyre $g(j) = 2^j$ minden $0 \le j \le 10$ esetén. Számítsuk ki $g(11)$ értékét.*

2.4.26. *Ha az $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom négy különböző egész helyen is felveszi az 5 értéket, akkor felveheti-e egy egész helyen a 12-t?*

2.5.16. *Az a, b, c számokra teljesül, hogy*

$$a + b + c = 3\,,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 5\,,$$
$$a^3 + b^3 + c^3 = 7\,.$$

Határozzuk meg $a^j + b^j + c^j$ értékét, ha $j = 4, 5, 6$? Léteznek-e egyáltalán ilyen a, b, c számok?

2.4.27. *Mutassuk meg, hogy ha R kommutatív, egységelemes gyűrű, amely fölött az interpoláció korlátlanul elvégezhető, akkor R test.*

2.5.18. *Mutassuk meg, hogy véges test nem lehet algebrailag zárt.*