Bsc algebra1 emelt szintű gyakorlat

Hatodik feladatsor (2009 okt. 13–14)

Gyakorló feladatok

1. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat az első sor, majd az utolsó oszlop szerinti kifejtéssel, végül a harmadik determináns kivételével a felső háromszög alakra hozás módszerével is. Az első két mátrixot invertáljuk is a Gauss-eliminációs módszerrel.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2. *Írjuk fel az általános kétszer kettes, majd a háromszor hármas determináns képletét a determináns definíciója alapján. Mutassuk meg, hogy a háromszor hármas determináns értéke nulla lesz, ha két oszlopa egyenlő. Mutassuk meg azt is, hogy a háromszor hármas determináns, mint a második oszlopvektorának függvénye, összegtartó.*

3. *Az $((a_{ij}))$ négyszer négyes mátrix determinánsának kiszámításakor mi lesz az alábbi tagok előjele: $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$, $a_{13}a_{34}a_{41}a_{22}$, $a_{22}a_{41}a_{34}a_{13}$?*

4. *Egy determináns egyik kifejtési tagját tükrözzük a determináns mellékátlójára. Hogyan változik meg a megfelelő permutációban az inverziók száma?*

5. *Egy 2009×2009-es determináns minden sora számtani sorozat. Számítsuk ki a determinánst.*

6. *Egy determinánsban minden oszlopösszeg osztható héttel. Igazoljuk, hogy a determináns értéke is osztható héttel.*

7. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$$

8. *Igazoljuk, hogy ha egy n-edrendű, komplex elemű determinánsban a_{ij} az a_{ji} konjugáltja minden i, j-re, akkor a determináns értéke valós. Ha ehelyett azt tudjuk, hogy $a_{ij} = -a_{ji}$, akkor mely n-ekre tudjuk kiszámítani a determináns értékét ebből az információból?*

9. *Legyen T test, $A \in T^{k\times k}$, $B \in T^{m\times m}$, $X \in T^{k\times m}$ és O az $m \times k$-s nullmátrix. Rakjuk össze az M mátrixot ebből a négy blokkból a következőképpen:*

$$M = \begin{pmatrix} A & X \\ O & B \end{pmatrix}$$

Igazoljuk, hogy $\det(M) = \det(A)\det(B)$.

10. *Igazoljuk, hogy ha egy $n \times n$-es mátrixban van egy $m \times k$-as téglalap csupa nullákból, és $m + k > n$, akkor a mátrix determinánsa nulla.*

11. *Legyen M egész számokból álló négyzetes mátrix. Igazoljuk, hogy M^{-1} akkor és csak akkor áll csupa egész számból, ha* $\det M \in \{1, -1\}$.

12. *Legyen T test, $M \in T^{n\times m}$, és $E^{ij} \in T^{n\times n}$ az a mátrix, amiben az i-edik sor j-edik eleme 1, a többi elem 0. Mutassuk meg az alábbiakat.*

(1) *Az $E^{ij}M$ mátrix i-edik sora éppen az M mátrix j-edik sora, a többi sor pedig azonosan nulla.*
(2) *Az $E + E^{ij} + E^{ji} - E^{ii} - E^{jj} = E^{ij} + E^{ji} + \sum_{k\neq ij} E^{kk}$ mátrixszal való balszorzás felcseréli M-ben az i-edik és a j-edik sort.*
(3) *Az $E + \lambda E^{ij}$-vel való balszorzás az M mátrix j-edik sorának λ-szorosát hozzáadja az i-edik sorhoz.*
(4) *Ha az egységmátrix főátlójának i-edik elemét 1-ről λ-ra változtatjuk, akkor az ezzel a mátrixszal való balszorzás az M mátrix i-edik sorát λ-szorosára változtatja.*

Igazoljuk azt is, hogy balszorzás helyett jobbról szorozva a megfelelő $m \times m$-es mátrixokkal az oszlopokra vonatkozó analóg átalakításokat kapjuk.

Nehezebb feladatok

13. *Van-e olyan* 123456789 × 123456789*-es mátrix, melyben csak a 0 és 1 számok szerepelnek, és determinánsa 2?*

14. *Legyen $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$, és ε_j a $2\pi j/n$ szöghöz tartozó n-edik egységgyök. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi, úgynevezett ciklikus determináns értéke*

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_0) \cdot f(\varepsilon_1) \cdot \ldots \cdot f(\varepsilon_{n-1})\,.$$

15. *Legyen $p > 2$ prím, és tekintsük az $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{p-2}x^{p-2} \equiv 0\ (p)$ kongruenciát, ahol $p \nmid a_0$. Bizonyítsuk be, hogy ez akkor és csak akkor megoldható, ha*

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{p-2} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p-2} & a_0 & \dots & a_{p-3} \end{vmatrix} \equiv 0\ (p)\,.$$

16. *A sakkbajnokság végén azt tapasztalták, hogy nem lehet kiválasztani úgy néhány játékost, hogy bármelyik játékos (a közülük valók is) ezek ellen összesen egész számú pontot szerzett. Igazoljuk, hogy a résztvevők száma páros (mindenki mindenkivel egyszer játszott, győzelem: $1-0$, döntetlen: $0.5-0.5$, saját maga ellen mindenki nulla pontot szerzett.)*

17. *Bizonyítsuk be, hogy ha M* nilpotens *(azaz négyzetes, és van olyan m természetes szám, amire $M^m = O$), akkor $(I - M)$-nek létezik inverze.*

Ötlet: IV/1. Mutassuk meg, hogy háromszög esetén a szabályosnál kapjuk a legnagyobb kört. Alkalmazzuk Helly tételét.

Ötlet: V/1. A test elemei legyenek $\{0, 1, A, B\}$. Mennyi lehet $1 + 1$, illetve A^2? Az eredményt lásd az 5.2.10. Gyakorlat megoldásában.